

浙江师范大学 2007 年硕士研究生入学考试试题

科目代码: 681

科目名称: 数学分析

提示:

- 1、本科目适用专业: 基础数学、计算数学、应用数学、运筹学与控制论、系统理论;
- 2、请将所有答案写于答题纸上, 写在试题上的不给分;
- 3、请填写准考证号后 6 位: _____。

一、(每小题 6 分, 共 48 分) 计算题。

1、求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ 。

2、设 $|x| < 1$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n})$ 。

3、求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{100}} e^{-\frac{1}{x}}$ 。

4、求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\arctan \frac{a}{x} - \arctan \frac{a}{x+1} \right)$ ($a \neq 0$)。

5、求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(i+1)(i+2)}$ 。

6、求 $\int_0^{2\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ 。

7、求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_1^2 \sqrt[n]{1+x} dx \right)^n$ 。

8、求由 $y = |\ln x|$ 与直线 $x = \frac{1}{10}$, $x = 10$, 和 x 轴所围的平面图形的面积。

二、(每小题 10 分, 共 20 分) 求下列积分:

1、 $I = \int e^{ax} \cos bxdx$, 其中 $ab \neq 0$ 。

2、 $I = \iiint_S |xyz| ds$, 其中 S 为旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 介于平面 $z=0$ 和 $z=1$ 之间的部分。

三、(每小题 10 分, 共 20 分) 由黎曼积分的定义证明:

1、 $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ 。

2、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{2k-1}{4n} \pi = \frac{2}{\pi}$ 。

四、(12 分) 设闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 的极限函数 $f(x)$ 也在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$ 。此一结论成立吗? 证明或举反例。

五、(15 分) 证明 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(1+x^n)} = \frac{1}{2} \ln 2$ 。

六、(15 分) 证明正项级数 $\sum a_n$ 和 $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ 同敛散。

七、(20 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 利用 $f(1) = (n+1) \int_0^1 x^n f(x) dx$ 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1)。$$