浙江师范大学 2008 年硕士研究生入学考试试题

科目代码: 881　　　　科目名称: 高等代数

提示:

1 本科目适用专业: 基础数学、计算数学、应用数学、运筹学与控制论、系统理论 ;

2 请将所有答案写到答题纸上,写在试卷上不得分;

3 请填写准考证号后六位: ________ 。

一 填空题(每一空格 3 分, 满分 30 分)

1 已知 $f(x)=x^6+x^4-2x^2-2$ 有一个复数根 i ， 则 $f(x)$ 的全部复数根是______ 。

2 如果多项式 $f(x)=p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_r^{k_r}(x)$, 其中 $p_i(x)$ 是首项系数为 1 的互不相同的不可约多项式， $k_i\ge 1$, 那么 $(f(x),f'(x))=$__________ 。

3 如果分块矩阵 $G=\begin{pmatrix} E & A \\ B & C \end{pmatrix}$ 经过初等行变换：第一行左乘 $-B$ 加到第二行上，那么矩阵 G 变成了矩阵________，其中 E 是单位矩阵。

4 若 $A^k=0,\ k\ge 2$, 则 $(A^{k-1}+\cdots+A+E)^{-1}=$ ___________ 。

5 设 A,B 分别是 $n\times 1$ 和 $1\times m$ 矩阵， 且 $AB=C\ne 0$, 则 C 的秩是__________ 。

6 如果 n 阶实数矩阵 A 的行列式 $|A|\ne 0$, 那么二次型 $X'AA'X$ 是_________二次型。

7 在线性变换意义下, 矩阵 $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 表示平面上向量绕原点的一个旋转, 按照变换乘积的定义， $A^n=$___________ 。

8 设 3 维线性空间 V 的线性变换 $\mathcal{A}$ 有三个特征值 $1,\ 2,\ 0$, 则 $\mathcal{A}$ 的值域 $\mathcal{A}V$ 的维

数是________，$\mathscr{B}=\mathscr{A}^2+\mathscr{E}$ 的值域 $\mathscr{B}V$ 的维数是________，其中 $\mathscr{E}$ 是恒等变换。

9 如果 n 阶实数矩阵 A 的 n 个行向量是欧氏空间 R^n 中一组两两正交的单位向量, 那么 $AA'=$ __________ 。

二 计算行列式（10 分）

$$D=\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & a & b \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & c & d \\ a & b & x_{33} & x_{34} & 0 & 0 \\ c & d & x_{43} & x_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

三（20 分）已知 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix}$，且 n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解，求 a 的所有值, 并求出相应解空间的维数和一组基。

四（20 分） 已知 $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，计算 $B^{-1}AB$ 及 $B^{-1}f(A)B$，其中 $f(x)=5x^{50}-5x^{10}+2$。 从 $B^{-1}AB$ 的结果可以得出什么结论?

五（10 分） 设 A,B 分别是 $n\times r$，$r\times m$ 矩阵，A,B 的秩都是 r，证明 AB 的秩也是 r。

六（20 分） (1) A 是 $s\times n$ 矩阵，已知 n 维列向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 都是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解，作矩阵 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$，问 $AB=?$

（2） $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求一个 3×2 矩阵 B，使 $AB=0$。

七（20 分） 记 n 维线性空间 V 的线性变换 $\mathcal{A}$ 的核为 $\mathcal{A}^{-1}(0)$，$\mathcal{A}$ 的值域为 $\mathcal{A}V$。

（1） 证明 $\mathcal{A}^{-1}(0)$ 和 $\mathcal{A}V$ 都是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间；

（2） 如果 $\mathcal{A}V$ 的维数是 1，且 $\mathcal{A}^{-1}(0)\cap\mathcal{A}V=\{0\}$，证明 $\mathcal{A}$ 在 V 的某一组基下的矩阵是以下形式的一个对角矩阵：

$$\begin{pmatrix}\lambda_0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_0\neq 0$。

八 （20 分）设 V 是 n 维欧氏空间，$\mathcal{A}$ 是 V 的正交变换，又设 1 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征值，且属于特征值 1 的特征子空间 W 的维数是 $n-1$，证明存在 V 的单位向量 η，使对 V 中所有向量 α，$\mathcal{A}\alpha=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta$。