浙江师范大学 2009 年硕士研究生入学考试试题

科目代码： 881　　　　科目名称： 高等代数

提示：

1、本科目适用专业：基础数学、计算数学、应用数学、运筹学与控制论、系统理论。

2、请将所有答案写于答题纸上，写在试题上的不给分；

3、请填写准考证号后 6 位：__________。

一 填空题（每小题 3 分，本题共 24 分）

1．多项式 $3x^4-22x^3+28x^2+38x-15$ 的有理根是________。

2．$n\ (\geq 2)$ 阶矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 的行列式 $|A^*|=$________ 。

3．如果 n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 的系数矩阵 A 的秩是 $n-2$，$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 是相应的非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的三个线性无关的特解，那么 $AX=0$ 有基础解系________ 。

4．设 4 阶矩阵 A 的行列式 $|A|=1$，已知其两个特征值是1, 2,，其余两个特征值的和是 $-\dfrac{3}{2}$，那么这两个特征值是________ 。

5．如果复数 $a+b\,i$ 是实数矩阵 A 的一个特征值，那么 $|(a-b\,i)E-A|=$________ 。

6．设 A,B 分别是 $m\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵，$n\geq m$，若 $AB=E_m$，则 A 的秩是________ 。

7．如果 2 维实空间 R^2 中向量 $\alpha=(x_1,x_2)$, $\beta=(y_1,y_2)$ 关于以下定义的二元实函数

$$(\alpha,\beta)=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

成为欧氏空间，那么 a 满足条件________。

8．如果线性变换 $\mathscr{A}$ 在一组基下的矩阵是 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 5 & 1\\ -1 & 7 & 3 & 2\end{pmatrix}$，那么 $\mathscr{A}$ 的核 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 的维数是________。

二 （15 分）证明 $x(x^2+x+1)\,|\,(x^3-1)^{2n}-x^{3m+2}-x-1$，其中 n,m 是正整数。

三 （20 分）设有矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5 & 2\\ -1 & a & 0 & 8\\ b & 9 & -5 & 26\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}12 & y & 8\\ -6z & z & 8\\ w & x & 6\\ x & 1 & -1\end{pmatrix}$$

（1）a,b 取什么值时，矩阵 A 的秩是 2 。

（2）若 A 的秩是 2 ，求 w,x,y,z 的值，使 $AB=0$，并选取 B 中的向量使其成为齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系。

四（20 分）已知 n 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & a & \cdots & a\\ a & 0 & \cdots & a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a & a & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

（1）求 A 可逆的条件;

（2）设 $a\neq 0$，求 A 的特征值及线性无关的特征向量;

（3）判别 A 是否与一个对角矩阵相似。

五 （20 分）如果线性变换 $\mathcal{A}$ 在二组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 和 e_1,e_2,e_3 下的矩阵分别是

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & b\\ 1 & b & a\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

求 a,b 的值。

六 （20 分）设 $n=2m$ 是偶数，实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}ax_i^2+2x_1x_n+2x_2x_{n-2}+\cdots+2x_mx_{m+1}$$

（1）写出二次型的矩阵;

(2) 求 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 正定的条件。

七（15 分）设 A 是 n 阶矩阵，其特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$，$g(\lambda)$ 是一个多项式，如果 $(f(\lambda),g(\lambda))=1$，证明 $g(A)$ 是可逆矩阵，并且其逆是 A 的多项式。

八（16 分）设 B 是 $s\times m$ 矩阵，A 是 $n\times n$ 矩阵

（1）证明所有满足条件 $BXA=0$ 的 $m\times n$ 矩阵全体

$$V=\left\{X\,\middle|\,BXA=0\right\}$$

是 $P^{m\times n}$ 的子空间。

（2）如果 秩$(B)=m$，秩$(A)=r$，证明 维$(V)=m(n-r)$。