浙江师范大学 2009 年硕士研究生入学考试试题

科目代码：681　　　　　　　　　　　　　　　科目名称：数学分析

提示：

1、本科目适用专业：**基础数学、计算数学、应用数学、运筹学与控制论、系统理论**；

2、请将所有答案写于答题纸上，写在试题上的不给分；

3、请填写准考证号后 6 位：__________。

一、（每小题 4 分，共 20 分）叙述下列各概念或定理。

1. 函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在区间 I 上不一致收敛。

2. 二元函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点可微。

3. 闭区间套定理。

4. 积分第一中值定理。

5. 黎曼可积的充分必要条件。

二、（每小题 10 分，共 50 分）计算下列各题。

1. $\iint\limits_D \sin|x-y|dxdy$,　　$D=\left\{(x,y):\ 0\le x,y\le \dfrac{\pi}{2}\right\}$。

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$。

3. $\iint\limits_\Sigma x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$, Σ: 球面$x^2+y^2+z^2=a^2$上半部分，取上侧。

4. 设 $z=z(x,y)$由$z+e^z=xy$所确定，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

5. 求星形线 $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$上点$P(\dfrac{a}{8},\dfrac{3\sqrt{3}}{8}a)$ 处的切线和星形线以及坐

标轴围成的在第一象限部分区域的面积。

三、(14 分)求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}\left(\frac{x}{3x+1}\right)^{2n}$ 的收敛域、和函数 $S(x)$ 以及和 $S(-\frac{1}{2})$。

四、(14 分)证明不等式 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geq\sqrt{1+x^2},\ \forall x\in\mathbb{R}$ 成立。

五、(14 分)讨论函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\frac{\sin^{2n}x}{1+\sin^{2n}x}$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上的一致收敛性、绝对收敛性以及绝对一致收敛性。

六、(14 分)设 $f(x)$ 在[-1,1]上二阶连续可微,$f(0)=0$,证明(可用 Taylor 展开)

$$\left|\int_{-1}^{1}f(x)dx\right|\leq\frac{M}{3},\ \text{其中} M=\sup_{-1\leq x\leq 1}\left|f''(x)\right|.$$

七、(12 分)两抛物线 $y=1-x^2$ 和 $y=x^2-1$ 围成闭区域 D。试求整个位于 D 内且面积达到最大的圆的方程。

八、(12 分)任取 $a\geq 1$,构造数列如下:$x_1=a,\ x_2=\frac{a}{a+a},\ x_3=\frac{a}{a+\frac{a}{a+a}},\ldots$。试证

1. $\forall n\geq 2$,有 $\frac{1}{2}\leq x_n<1$;

2. $\{x_n\}$ 收敛,并求其极限值 λ。