

浙江师范大学 2010 年硕士研究生入学考试初试试题

科目代码： 681 科目名称： 数学分析

适用专业： 基础数学、计算数学、应用数学、运筹学与控制论、系统理论。

提示：

- 1、请将所有答案写于答题纸上，写在试题上的不给分；
- 2、请填写准考证号后 6 位：_____。

一、计算题：（共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分）

1、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)\sin x}{x \tan x}$ 。

2、 $\int \frac{1}{x^4(1+x^2)} dx$ 。

3、求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{x+1} \right)$ 。

4、设 $z = x^y y^x$ ，求 dz 。

5、若 $F(x) = \int_0^x (x+y)f(y)dy$ ，其中 $f(y)$ 可微，求 $F''(x)$ 。

6、求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}$ 。

7、求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)x^{2n-2}}{2^n}$ 的收敛域。

8、计算曲线积分 $\int_L (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy$ ，其中 L 为上半圆周：
 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ ， $y \geq 0$ ，沿逆时针方向。

二、简答题：（共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分）

1、用 $\varepsilon - \delta$ 定义证明 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{3}{2}$ 。

2、试举一个在某点累次极限存在但重极限不存在的二元函数。

3、无界数列是无穷大量吗？试说明理由。

三、(11分) 讨论函数 $f(x) = (x-1)^2 D(x)$ 的可导性, 其中

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数;} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

四、(12分) 设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 连结端点 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ 的弦与曲线 $y = f(x)$ 相交于点 $C(c, f(c))$ 。证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使 $f''(\xi) = 0$ 。

五、(12分) 设 f 在 (a, b) 上连续, 证明 f 在 (a, b) 上一致连续的充要条件是 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 都存在。

六、(12分) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 的绝对收敛与条件收敛。

七、(12分) 将积分 $\iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2, z) dv$ 化成 (1) 直角坐标, (2) 柱面坐标, (3) 球面坐标下的三次积分, 其中 Ω 是由 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$ ($a > 0$) 所围立体。

八、(12分) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{x^2} + \sqrt{n}}{n^{3/2}}$ 在任何有穷区间 $[a, b]$ 上一致收敛, 但在任何一点 x_0 处不绝对收敛。