浙江师范大学 2010 年硕士研究生入学考试初试试题

科目代码： 881　　　　科目名称： 高等代数

适用专业： 基础数学、计算数学、应用数学、运筹学与控制论、系统理论

提示：

1、请将所有答案写于答题纸上，写在试题上的不给分；

2、请填写准考证号后 6 位：____________。

一、填空题：(共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分)

1．已知多项式 $f(x)=x^3+27$，则 $f(x)$在复数域 $\mathbf{C}$ 上的三个根是_______.

2. 设 A^*是 n 阶可逆矩阵 A 的伴随矩阵，如果矩阵 A 的行列式 $|A|=d\neq 0$，那么 A^*的逆矩阵的行列式 $|(A^*)^{-1}|=$________.

3．设 B, C, D 都是 6×2 矩阵，记分块矩阵 $A=(B, C, D)$，如果矩阵 A 的行列式 $|A|=a$，那么，分块矩阵 $(B, 2C, 3D)$ 的行列式等于________.

4．已知 n 维实向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，且

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-k\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3,\quad (k\in\mathbf{R})$$

如果实向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关，则实数 k 的值为_________.

5. 设 $\mathbf{C}_{2\times 2}=\{$复数域上的所有 2 级方阵$\}$，则 $\mathbf{C}_{2\times 2}$ 关于矩阵的加法与数乘构成一个实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间，那么这个线性空间的维数为_______.

6. 设 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 A，如果由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 到 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 的过渡矩阵为 X，即

$$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)X,$$

那么，线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 下的矩阵为_________.

7．设 n 级矩阵 A 的最小多项式 $m_A(x)=(x+1)^2(x+2)$，那么，矩阵 A 的若尔当(**Jordan**)标准形 J 中，其若尔当块矩阵 J_i 的最大级数是________.

8．设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是 2 维欧氏空间 V 的一组基，$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$为基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 下的度量矩阵. 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2, \boldsymbol{\alpha}_2=\varepsilon_1-\varepsilon_2$，那么，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 之间的夹角 $\langle\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\rangle$ 的余弦 **cos** $\langle\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\rangle$ =__________.

二、(15 分) 计算下列行列式:

$$D=\begin{vmatrix} a+b & c+a & b+c \\ c+a & b+c & a+b \\ b+c & a+b & c+a \end{vmatrix}.$$

三、(20 分) 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = b, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + ax_4 = -8. \end{cases}$$

(1) 证明: 对于任意数 a, b, 方程组都有无穷多解;

(2) 当 $a=1, b=6$ 时, 求此方程组的一般解.

四、(20 分) 设实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3)= x_1^2 + ax_2^2 +4 x_3^2 +4x_1x_2+2x_2x_3.$$

(1) 如果二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$为正定二次型, 求 a 的取值范围;

(2) 化二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$为标准形, 并证明其正惯性指数 $p\geqslant 2$.

五、(20 分) 记 $M_{n\times s}(P)=\{$数域 P 上的所有 $n\times s$ 矩阵$\}$, 则关于矩阵的加法与数乘构成一个数域 P 上的线性空间. 设 A 是一个已知的 n 级方阵, $\mathbf{0}$ 为 $n\times s$ 的零矩阵.

(1) 证明: 矩阵方程 $AX=\mathbf{0}$ 的解集合 V 是的 $M_{n\times s}(P)$一个线性子空间;

(2) 如果矩阵 A 的秩为 r, 求子空间 V 的维数 $\mathbf{dim}\,(V)$.

六、(20 分) 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是四维空间 V 的一组基，已知 V 的线性变换 $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 在这组基下的矩阵为:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

(1) 求线性变换 $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 的特征值;

(2) 求线性变换 $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 的核 $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{-1}(\mathbf{0})$与值域 $\boldsymbol{\mathcal{A}}(V)$.

七、(15 分) 设实系数多项式 $f(x)=x^3+ax^2+ax-(2a+1)$，其中 $a\in\mathbf{R}$，如果多项式 $f(x)$有三个不同的实数根，试确定实数 a 的取值范围.