浙江师范大学 2011 年硕士研究生入学考试初试试题(A 卷)

科目代码： 881 **科目名称：** 高等代数

适用专业： 基础数学、计算数学、应用数学、运筹学与控制论、系统理论

提示：

1、请将所有答案写于答题纸上，写在试题上的不给分；

2、请填写准考证号后 6 位：____________。

一．**填空题**（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

1. 设 $f(x),g(x),h(x)$ 都是数域 P 上的多项式，$f(x)=g(x)h(x)+1$，则 $(f(x),g(x))=$________。

2. 如果 $n-1$ 次可微函数组 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 在实数域上线性相关，那么行列式

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = \_\_\_\_\_\_\_\_。$$

3. 如果 A 是 n 阶实对称正定矩阵，则 A 的特征多项式：

$f(x)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$ 的所有系数至少有_______个 <0。

4. 设 A 是 n 阶矩阵，X 为 $2n\times n$ 矩阵，则矩阵方程 $\begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix}X=0$ 其中的一个解为________。

5. 如果 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ 是正交矩阵，那么齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=0 \end{cases}$$

的一个基础解系是_________。

6. 如果 ± 1 是 n 阶矩阵 A 的特征值，那么 $|E-A^2|=$_________。

7. 设 n 阶矩阵 A 的特征多项式是 $(\lambda-1)^n$，并且 A 相似于一个对角矩阵，那么属于特征值 1 的特征子空间的维数＝________。

8. 如果向量组 $\beta_1=(a,1,1,1),\ \beta_2=(1,a,1,1),\beta_3=(1,1,a,1),\beta_4=(1,1,1,a)$ 线性相关，那么 $a=$________。

二．（15 分） 计算行列式：$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & b \end{vmatrix}$

三．（15 分）设 V_1 是数域 P 上的线性方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 的解空间，V_2 是数域 P 上线性方程组

$$\begin{cases} x_1 & =0 \\ \quad x_2-x_3 & =0 \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \qquad x_{n-1}-x_n & =0 \end{cases}$$

的解空间（$n\geq 3$），

（1）分别求出 V_1 和 V_2 的维数和一组基；

（2）证明 $P^n=V_1\oplus V_2$

四．（20 分）在 P^3 中，定义变换 σ 为

$\sigma(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_1+x_3,x_2)$

（1）证明 σ 是 P^3 的线性变换；

（2）求 σ 的特征值和相应的线性无关的特征向量。

五．（20 分）用 R 表示实数域，用 V 表示所有形如 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$ 的二阶实数矩阵组成的

集合: $V=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \middle| a_1,a_2\in R\right\}$,

（1）证明V关于矩阵的加法和实数与矩阵的数乘是R上的线性空间；

（2）求V的维数；

（3）对任意的$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & -b_1 \end{pmatrix}\in V$，证明$V$关于下面定义的二元函数：

$(A,B)=a_1b_1+a_2b_2$

成为欧氏空间；

（4）取矩阵$Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，对任意的$A\in V$，定义变换$\sigma$为：

$\sigma(A)=Q'AQ$

证明：σ是V的一个正交变换。

六.（15 分）设$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$都是数域$P$上的多项式，

$f(x)=f_1(x^n)+xf_2(x^n)+\cdots+x^{n-1}f_n(x^n)$, $g(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$

如果$f_1(1)=f_2(1)=\cdots=f_n(1)$，证明：$g(x)|f(x)$。

七.（15 分）设A是反对称实数矩阵，证明：

（1）A的特征值是零或纯虚数；

（2）如果$E\pm A$都是非退化的，那么$(E-A)(E+A)^{-1}$是正交矩阵，且不以-1 为特征值；

（3）证明$E\pm A$都是非退化的。

八.（10 分） 设A是$n\times s$列满秩实数矩阵，秩$(A)=s$，其中A' 是A的转置矩阵，

证明：（1）$A'A$是正定矩阵；

（2）$A(A'A)^{-1}A'$是半正定矩阵；

（3）存在$n\times s$列正交矩阵Q（Q的列向量是两两正交的单位向量，$Q'Q=E_s$），使得$A(A'A)^{-1}A'=QQ'$

（4）求$A(A'A)^{-1}A'$的特征值。