浙江师范大学 2012 年硕士研究生入学考试初试试题(A 卷)

科目代码： **881** **科目名称：** 高等代数

适用专业： 070100 数学、071101 系统理论、071400 统计学

提示：

1、请将所有答案写于答题纸上，写在试题纸上的不给分；

2、请填写准考证号后 6 位：____________。

一、填空题（共 8 小题，每小题 5 分，满分共 40 分）

1．设 $p(x)\in P[x]$， $p(x)$ 称为数域 P 上的不可约多项式，如果 $p(x)$ 满足__________.

2．设 A 是三阶实矩阵且满足 $|E+2A|=0, |E+3A|=0, |E+4A|=0$。则 $|E+A|=$____.

3．设 $1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3$ 是 $P_4[x]$ 的一组基，则 $f(x)=x^3+3x^2+x+2$ 在此基下的坐标是__________.

4．设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 称为线性空间 V 的一组基，如果满足：__________.

5．设方阵 A 可逆，则 $(A^*)^{-1}=$__________.

6．设 A 是 4×5 矩阵且 A 的秩等于 3， $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是线性方程组 $Ax=\beta$ 的三个线性无关的解，则线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解为__________.

7．欧氏空间 V 上的线性变换 σ 若满足__________，则 σ 称为正交变换。

8．设 A 是 3 级矩阵且 $|A|=2$，则 $|2A^* - 2A^{-1}|=$__________.

二（满分 15 分）、设 $\alpha_1=(1,2,3,0)'$， $\alpha_2=(-1,-2,0,3)'$,$\alpha_3=(2,4,6,0)'$，$\alpha_4=(1,-2,-1,0)'$， $\alpha_5=(0,0,1,1)'$，试求向量组的一个极大线性无关组并把其余向量用此极大线性无关组表示。

三（满分 15 分）、用正交线性替换 $X=QY$，把二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=-4x_1{}^2-4x_2{}^2-4x_3{}^2-4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$$

化为标准形并写出相应的正交矩阵 Q。

四（满分 20 分）、设 $P^{2\times 2}$ 表示数域 P 上的二阶方阵全体所成的集合。

（1） 证明：$P^{2\times 2}$ 关于矩阵的加法和数乘构成线性空间；

（2） 设$B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$，定义线性变换$f:P^{2\times 2}\to P^{2\times 2}$为$f(X)=BX$，求$f$在基

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

下的矩阵A，线性变换f的特征值和相应的特征向量。

五（满分 15 分）、设n级矩阵A满足$A^2=A$，证明：$r(A)+r(A-E)=n$，其中，$r(A)$表示矩阵A的秩。

六（满分 15 分）、设$R[x]$表示实数域R上全体多项式组成的线性空间，D是$R[x]$的线性变换且满足：（1）$D(x)=1$；（2）$D(f(x)g(x))=D(f(x))g(x)+f(x)D(g(x))$，证明：$D$就是求导变换。

七（满分 15 分）、设$a_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$，计算

$$D=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a_2 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & \cdots & n+a_n\end{vmatrix}$$

八（满分 15 分）、设V实数域R上的n维线性空间，$f:V\to R$称为V上的线性函数，如果满足：对任意的$\alpha,\beta\in V,k\in R$　$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta),f(k\alpha)=kf(\alpha)$，记$V^*=\{f\mid f$为$V$上的线性函数$\}$。对任意的$f,g\in V^*,k\in R$　，定义

$$(f+g)(\alpha)=f(\alpha)+g(\alpha)，(kf)(\alpha)=kf(\alpha)。$$

（1） 证明：V^*是R上的线性空间；

设$e_1,e_2,\cdots,e_n$是V的一组基，定义V上的线性函数$f_i(i=1,2,\cdots,n)$为$f_i(e_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$，证明：$f_1,f_2,\cdots,f_n$是$V^*$的一组基。