

浙江师范大学 2012 年硕士研究生入学考试初试试题 (A 卷)

科目代码: 602 科目名称: 高等数学

适用专业: 070201 理论物理、070205 凝聚态物理、070206 声学、070207 光学

提示:

- 1、请将所有答案写于答题纸上, 写在试题纸上的不给分;
- 2、请填写准考证号后 6 位: _____。

一、填空题: (共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

- (1) 函数 $f(x) = \sqrt{3-x} + \arcsin(x-3)$ 的定义域用区间表示为 ①_____。
- (2) 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{1+x}, & x \neq -1; \\ A, & x = -1. \end{cases}$ 当 $A =$ ②_____ 时, 函数 $f(x)$ 无间断点。
- (3) 曲线 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程为 ③_____。
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt}{x \sin x} =$ ④_____。
- (5) 曲线 $y = e^{\arctan x}$ 为凹的区间是 ⑤_____。
- (6) $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx =$ ⑥_____。
- (7) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)} =$ ⑦_____。
- (8) 幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ 的收敛半径为 ⑧_____。
- (9) 向量场 $\vec{A} = (x^2 - y)\vec{i} + 4z\vec{j} + x^2\vec{k}$ 的旋度 $\nabla \times \vec{A} =$ ⑨_____。
- (10) A^* 是三阶方阵 A 的伴随矩阵, 且 $|A| = 3$, 则 $\left| \frac{1}{3} A^* - 4A^{-1} \right| =$ ⑩_____。

二、(本题满分 10 分)

设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - ax - bx^2}{x^2} = 2$, 求常数 a 和 b .

三、(本题满分 12 分)

试问待定常数 λ 为多少时, 由曲线 $y = \lambda x^3 + 6x^2$ 、直线 $x = 1$ 和 x 轴 ($x \geq 0$) 所围成的平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小, 并求这最小的体积和此时 D 的面积.

四、(本题满分 12 分)

求微分方程 $y'' + y = e^x + \cos x$ 的通解.

五、(本题满分 10 分)

设 $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$, $z = uv$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

六、(本题满分 10 分)

试证明 $\int_0^a dy \int_0^y f(x) dx = \int_0^a (a-x) f(x) dx$, 并求 $\int_0^a dy \int_0^y e^{-(a-x)^2} dx$ 的值

七、(本题满分 12 分)

试证明 $\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$ 在 xOy 平面除去 y 的负半轴及原点的区域 G 内是某些二元函数的全微分, 并求出全体这样的二元函数.

八、(本题满分 10 分)

按常数 a 和 s 的取值来判定级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n^s}$ ($a > 0, s > 0$) 的收敛性.

九、(本题满分 10 分)

将 $f(x) = e^x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 展成正弦级数.

十、(本题满分 10 分)

已知方程组 (I) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + ax_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + bx_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = c \end{cases}$ 与 (II) $\begin{cases} x_1 + x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_4 = 2 \\ x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$ 同解, 试确定

常数 a, b, c 的值.

十一、(本题满分 14 分)

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量, 并说明 A 能否与对角阵相似.