浙江师范大学 2012 年硕士研究生入学考试初试试题(A 卷)

科目代码： **601** **科目名称：** 数学分析

适用专业： 070100 数学、071101 系统理论、071400 统计学

提示：

1、请将所有答案写于答题纸上，写在试题纸上的不给分；

2、请填写准考证号后 6 位：____________。

一、是非判断题

（下列命题正确的证明之，错误的举出反例。每小题 6 分，共 18 分）

1、若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

2、$f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处两个偏导数存在，则 f 在该点连续。

3、有限区间 $[a,b]$ 上的 Riemann 可积函数一定 Riemann 绝对可积

二、简答题（每小题 5 分，共 10 分）

1、叙述含参量广义积分 $\int_c^{+\infty} f(x,t)dx$ 在[a，b]上一致收敛的柯西准则。

2、叙述函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的 Heine 归结原理。

三、计算题（每小题 8 分，共 48 分）

1、求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-x^2\ln(1+\frac{1}{x}))$；

2、求不定积分 $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos x}$；

3、求 $\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式，并确定其收敛域；

4、求 $\oint_L (x^2+y^2+2z)\,ds$，其中 L 为圆周：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ ；

5、设 f 在 $(0,+\infty)$ 上可微，且 $\int_0^x t\,f(t)dt=\frac{x}{3}\int_0^x f(t)\,dt\quad(x>0)$，求 $f(x)$；

6、计算 $\iint\limits_D \sin x\sin y\cdot\max(x,y)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\}$。

四、（15 分）二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\ne 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

（1）求 $f_x(0,0),\ f_y(0,0)$；

（2）证明 f_x 在原点 $O(0,0)$ 不连续；

（3）判断函数 f 在原点 $O(0,0)$ 处的可微性。

五、（10 分）设 $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(x^2+y^2+z^2)dxdydz,\quad f(u)$ 可微，求 $F'(t)$。

六、（10 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n-1)3^{n-1}}$ 的和函数。

七、（12 分）$e^z-xyz=0$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

八、（12 分）证明：若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

九、（15 分）判定广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\cdot\arctan x}{x^p}dx\quad(p>0)$ 的敛散性。

（收敛性需说明绝对收敛和条件收敛）