

浙江理工大学
二〇〇八年硕士学位研究生招生入学考试试题
考试科目：高等代数 代码：912

(*请考生在答题纸上答题，在此试题纸上答题无效)

一. 证明 $x^4 - 10x^2 - 1$ 在有理数域上不可约. (10分)

二. 叙述本原多项式的概念并证明两个本原多项式的乘积也是本原多项式. (15分)

三. 计算 n 级行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 + \lambda_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 + \lambda_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & 1 + \lambda_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} + \lambda_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n + \lambda_n \end{vmatrix}. \quad (15 \text{ 分})$$

四. 设

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in+1}), i = 1, 2, \dots, r; \quad (1)$$

$$\beta_j = (b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jn+1}), j = 1, 2, \dots, s. \quad (2)$$

为两个 $n+1$ 维向量组.

证明: 若向量组(1)和向量组(2)等价, 则线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_{1n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_{2n+1} \\ \cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = a_{rn+1} \end{cases} \quad (3)$$

和

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = b_{1n+1} \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = b_{2n+1} \\ \cdots \\ b_{sn}x_1 + b_{s2}x_2 + \cdots + b_{sn}x_n = b_{sn+1} \end{cases} \quad (4)$$

同解. 举例说明上述命题的逆命题不成立.

(20 分)

第 1 页, 共 2 页

五. 证明 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2$ 是半正定而非正定二次型. (20 分)

六. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 R^3 中单位正交向量组,

$$\begin{cases} \beta_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_2 = -\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \beta_3 = \alpha_2 + \alpha_3 \end{cases}$$

$A = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 计算 $|A|$ 的绝对值. (15 分)

七. 设 $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$,

$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$, 其中 E 为单位矩阵, 求 B . (20 分)

八. 设 A 为 n 阶实矩阵, 且 A 有 n 个特征值, 若对于任意 n 维实向量 X , $X^T A X > 0$. 证明

$|A| > 0$. (15 分)

九. (1) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 求 A^k ;

(2) Fibonacci 数列: $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ 通项满足递推公式:

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-1}, (n > 2)$$

利用(1)结论给出 Fibonacci 数列的通项公式. (20 分)

第 2 页, 共 2 页

