

浙江理工大学

二〇〇九年硕士学位研究生招生考试试题

考试科目：高等代数 代码：912

(*请考生在答题纸上答题，在此试题纸上答题无效)

一. (20 分) 设

$$\begin{cases} \alpha_1 = (1, 2, -1, -2), \\ \alpha_2 = (3, 1, 1, 1), \\ \alpha_3 = (-1, 0, 1, -1), \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \beta_1 = (2, 5, -6, -5) \\ \beta_2 = (-1, 2, -7, 3) \end{cases} \quad (2)$$

为两向量组， W_1 和 W_2 分别为(1)和(2)生成的线性空间。

(i) 求 $W_1 + W_2$ 和 $W_1 \cap W_2$ 的维数和基。

(ii) 求解方程组以(2)为基础解系

二. (20 分) 已知两个三元线性方程组(I)和(II)的通解分别为：

$$\xi_1 + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 \text{ 和 } \xi_2 + c\eta.$$

$$\text{其中 } \xi_1 = (1, 0, 1), \xi_2 = (0, 1, 2), \eta_1 = (1, 1, 0), \eta_2 = (1, 2, 1), \eta = (1, 1, 2).$$

求(I)和(II)的公共解。

三. (20 分) 证明矩阵的行秩等于列秩。

四. (15 分) 用正交变换化二次形 $f(x_1 + x_2 + x_3) = 2x_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 + 4x_2x_3$ 为标准型。已知

$a > 1$, 1 为该二次型系数矩阵的一个特征值。

五. (15 分) 设 n 阶方阵 A 满足方程 $f(A) = g(A) = 0$ 。其中

$$f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6, g(x) = x^5 + 4x^4 - 14x^2 - 17x - 6.$$

证明 A 相似于某对角矩阵。

六. (15 分) 设 A, B 为 n 阶正定矩阵。证明：

(1) 有正定矩阵 C 使得 $A = C^2$;

(2) AB 的特征值全部大于零.

七. (15 分) 设 A 为 n 阶实可逆矩阵. 给出将 A 表示为上三角矩阵 T 和正交矩阵 Q 乘积 $A = QT$ 的方法.

八. (15 分) 设 n 次实系数多项式 $f(x)$ 有 n 个不同的实根. 证明 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 没有重因式.

九. (15 分) 讨论多项式 $x^p + x^{p-1} + \cdots + x + 1$ 在有理数域上的可约性.