浙江理工大学

二○一○年硕士学位研究生招生入学考试试题

考试科目：数学分析　　　代码：360

注 1：请考生在答题纸上答题（写明题号，不必抄题，在此试题纸上答题无效）；
注 2：本试卷共 4 页，3 小时完成，满分 150 分.

一、选择题（每小题 4 分，共 80 分）

1．设 $S=\left\{1-\dfrac{1}{2n}\right\}$，$n=1,2,\cdots$，则下列结论正确的是（　）.

（A）$\sup S<1$　（B）$\sup S=1$　（C）$\inf S=1$　（D）$\inf S>\dfrac{1}{2}$

2．设

$$f(x)=\begin{cases}\cos x-x, & -\pi\le x<0,\\ \cos x+x, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$$

则在定义域上 $f(x)$ 为（　）.

（A）偶函数　（B）无界函数　（C）单调函数　（D）周期函数

3．下列结论正确的是（　）.

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$，则必有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$

（B）任意两个无穷小量均可进行阶的比较

（C）若 α 为无穷小量，则 $1/\alpha$ 必为无穷大量

（D）有界变量乘无穷大量未必为无穷大量

4．设

$$f(x)=\begin{cases}e^x, & x\le 0,\\ ax+b, & x>0,\end{cases}$$

若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，则必有（　）.

（A）$a=b=0$　（B）$a=1$，$b=0$

（C）a 为任意常数，$b=1$　（D）$a=2$，$b=-1$

5．设当 $x\to\infty$ 时，x^α 与 $\sin^3\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ 是等价无穷小量，则 α 为（　）.

（A）-6　（B）-3　（C）5　（D）-5

6．设

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ x+1, & x\ge 0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}x^2, & x<1,\\ 2x-1, & x\ge 1,\end{cases}$$

则下列函数中，（　）在 $(-\infty,+\infty)$ 上不连续.

（A）$f(x)\cdot g(x)$　（B）$g(f(x))$　（C）$f(g(x))$　（D）$f(x)+g(x)$

7. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+2x)-f(x_0-x)}{2x}=1$，则 $f'(x_0)=$（　　）.

（A）$-\dfrac{2}{3}$　　（B）$\dfrac{3}{2}$　　（C）$\dfrac{2}{3}$　　（D）$-\dfrac{3}{2}$

8. 曲线 $y=e^{-x^2}$（　　）.

（A）有三个拐点　　（B）有二个拐点　　（C）有一个拐点　　（D）没有拐点

9. 设曲线 $y=x^2+3x-5$ 在点 M 处的切线与直线 $2x-6y+1=0$ 垂直，则该曲线在 M 处的切线方程为（　　）.

（A）$y-3x+21=0$　　（B）$3y-x-23=0$

（C）$y+3x+14=0$　　（D）$3y+x-4=0$

10. 不一定可积的函数类是（　　）.

（A）连续函数全体　　（B）有界函数全体

（C）单调函数全体　　（D）按段光滑函数全体

11. $f(x)=\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}dt$，则当 $x\to 0^+$ 时，$f(x)$ 是关于（　　）的同阶无穷小量.

（A）x^4　　（B）x^3　　（C）x^2　　（D）x

12. 若 f 在 $[a,b]$ 上（　　），且 $f(x)\geq 0$，$\int_a^b f(x)dx=0$，则 $f(x)\equiv 0$.

（A）单调　　（B）有界　　（C）连续　　（D）可积

13. f 在 $[a,b]$ 上可积，则 f^2 在 $[a,b]$ 上也可积；f 的反常积分在 $[a,+\infty)$ 上收敛，则 f^2 的反常积分在 $[a,+\infty)$ 上（　　）.

（A）收敛　　（B）不收敛　　（C）不一定收敛　　（D）以上三个答案都不正确

14. 若（　　），则数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

（A）对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时对任意正整数 p 都有 $\left|\sum\limits_{k=n}^{n+p}u_k\right|<\varepsilon$

（B）对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时有 $\left|\sum\limits_{k=n}^{2n}u_k\right|<\varepsilon$

（C）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

（D）部分和数列 $\{S_n\}$ 有界

15．级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1-\cos\frac{\alpha}{n})\ \ (\alpha>0)$（　　）.

（A）绝对收敛　（B）条件收敛　（C）收敛性与α有关　（D）发散

16．函数系（　　）不是正交函数系.

（A）$[0,\ 2\pi]$上的函数系$\{1,\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$

（B）$[0,\ \pi]$上的函数系$\{1,\cos x,\cdots,\cos nx,\cdots\}$

（C）$[0,\ \pi]$上的函数系$\{\sin x,\sin 2x\cdots,\sin nx,\cdots\}$

（D）$[0,\ 1]$上的函数系$\{1,x,x^2,\cdots,x^n,\cdots\}$

17．下面函数（　　）在$(0,\ 0)$点的重极限和各累次极限相等.

（A）$f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y}$　（B）$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$

（C）$f(x,y)=\frac{e^x-e^y}{\sin xy}$　（D）$f(x,y)=\frac{y^2}{x^2+y^2}$

18．设$z=(1+xy)^y$，则$\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(1,\ 1)$的值为（　　）.

（A）1　（B）$1+2\ln 2$　（C）$(2\ln 2)^{-1}$　（D）$\ln 2$

19．$\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=$（　　），其中$L$是平面上某包含原点作为内点的单连通区域$D$的边界并取正向.

（A）1　（B）0　（C）-2π　（D）2π

20．设D是由直线$x=0$，$y=1$及$y=x$围成的区域，则二重积分$\iint_D f(x,y)d\sigma$可以化为的二次积分是（　　）.

（A）$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$　（B）$\int_0^1 dy\int_0^x f(x,y)dx$

（C）$\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy$　（D）$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy$

二、计算题（每小题 5 分，共 40 分）

1．求$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{x\sin y}$.

2．求$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

3．设 f 具有二阶连续偏导数，$z=f\left(x+y,\dfrac{x}{y}\right)$，求 z_{xx}，z_{xy}．

4．求由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$ 所确定的隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$．

5．求 $\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$．

6．计算 $\int_L xyds$，其中 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限中的部分，且 $a\neq b$．

7．讨论函数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^2}{[1+(n-1)x^2][1+nx^2]}$ 在区间 $I=(0,+\infty)$ 上的收敛性与一致收敛性．

8．求 $\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中 S 是上半球面 $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$，并取上侧为正向．

三、证明题（每小题 15 分，共 30 分）

1．证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x}, & x\neq 0,\\ y, & x=0\end{cases}$ 在全平面 $\mathbf{R}^2$ 上处处连续，但不一致连续．

2. 设函数 f 在 $(a,+\infty)$ 上可导．若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 都存在，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$．如果仅假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ 仍成立吗？若能成立，请给出证明；若不能成立，请举反例．