浙 江 理 工 大 学

2011 年硕士学位研究生招生入学考试试题

考试科目：数学分析　　　　代码：601

注 1：请考生在答题纸上答题（包括填空题、判断题及选择题；只需写明题号，不必抄题；在此试题纸上答题无效）.

注 2：本试卷共 3 页，3 小时完成，满分 150 分.

一、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

1. 若 $f(x)=\begin{cases} x^{\sin x}, & x\neq 0, \\ a, & x=0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$________.

2. 设 $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$，则 $f(x)$ 的拐点是________.

3. 实轴上的魏尔斯特拉斯(Weierstrass)聚点定理是________.

4. 垂直于平面 $x-y-\dfrac{1}{2}z=2$ 和 $x-y-z=2$ 的曲面 $x^2+y^2+z^2=x$ 的切平面方程是________.

5. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$ 的收敛域是________.

二、判断题（每小题 4 分，共 20 分）（判断下列各题是否正确，正确的打"√"，并简要说明理由；错误的打"╳"，并给出反例）

1．设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 不恒等于零，则 $\int_a^b (f(x))^2\,dx>0$．(　　)

2．若广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛且 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续，则必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$．(　　)

3．设可微函数列 $\{f_n\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上收敛，导函数列 $\{f'_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界，则 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛．(　　)

4．如果二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的任何方向上的方向导数都存在，则 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 必可微．(　　)

5．设 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 在单连通区域 D 内是某二元函数 $F(x,y)$ 的全微分，$A(a_1,b_1)\in D$，$B(a_2,b_2)\in D$，则

$$\int_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{a_1}^{b_2}P(x,a_2)dx+\int_{a_2}^{b_2}Q(b_1,y)dy\,.$$ ( )

三、选择题（每小题 5 分，共 25 分）

1．数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的几何意义是（ ）.

（A）在点 a 的某个邻域的内部含有 $\{a_n\}$ 中的无穷多个点

（B）在点 a 的某个邻域的外部含有 $\{a_n\}$ 中的无穷多个点

（C）在点 a 的任何一个邻域的外部含有 $\{a_n\}$ 中的无穷多个点

（D）在点 a 的任何一个邻域的外部至多含有 $\{a_n\}$ 中的有限个点

2．函数 f 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 f 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是（ ）.

（A）$\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在　　（B）$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

（C）$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在　　（D）$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

3．设 $f(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$，　$g(x)=x^2$，则（ ）.

（A）当 $x\to0$ 时，　$f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小量

（B）当 $x\to0$ 时，　$f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷小量

（C）当 $x\to0$ 时，　$f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶无穷小量（包括等价无穷小量）

（D）以上都不对

4．函数 $f(x)=\int_0^x\left(t^2-4t+3\right)dt$ 在 $D=(-\infty,+\infty)$ 的极小值为（ ）.

（A）0　　（B）$-\dfrac{4}{3}$　　（C）$\dfrac{3}{4}$　　（D）$-\dfrac{3}{4}$

5．设函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处（ ）.

（A）不连续　　（B）偏导数存在

（C）任一方向的方向导数存在　　（D）可微

四、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

1．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\Lambda+\frac{1}{2n}\right)$.

2．求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3．求 $I=\iiint\limits_V xdxdydz$，其中 V 为有 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 与 $x\ge 0$ 所围成的闭区域.

4．求 $I=\iint\limits_S \frac{dS}{z}$，其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=25$ 被平面 $z=3$ 所截的顶部.

5．求瑕积分 $\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)dx$.（要求先判别该瑕积分的收敛性）

五、证明题（每小题 10 分，共 30 分）

1．若二元函数 f 在有界闭区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上连续，证明 f 在 D 上一致连续.

2．证明：函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\left(\frac{1}{x^2}\right)}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处 n 可导且 $f^{(n)}(0)=0$，其中 n 为任意正整数．进一步问：f 在 $x=0$ 处能展开成泰勒(Taylor)级数吗？能的请写出 f 在 $x=0$ 处的泰勒(Taylor)级数并求收敛半径及收敛域；不能的请说明理由.

3．设 $a>0$ 是常数，证明函数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\Lambda\,(1+nx)}$ 在区间 $I=(0,a)$ 内不一致收敛.