

温州大学

2007 年研究生入学考试试题

考试科目: 数学分析(A) 报考学科、专业: 应用数学

请注意:全部答案必须写在答题纸上, 否则不给分。

1. (10 分) 证明: 数列 $\{\sin n\}$ 不收敛 .

2. (10 分) 已知 $f(0)=0$, $f'(0)$ 存在, 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{f(x)}$.

3. (15 分) 计算积分 $\int_0^n \frac{1-(1-\frac{t}{n})^n}{t} dt$.

4. (15 分) 已知 $f''(x)$ 连续, $f(0)=f(1)=0$, $|f''(x)| < A$,

求证: $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}, x \in [0, 1]$.

5. (10 分) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续周期函数, 求证:

(1) $\varphi(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{x}{T} \int_0^T f(t)dt$ 也是以 T 为周期的周期函数;

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(x)dx = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt$.

6. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \neq 0$,

求证: $\int_0^{+\infty} f(x) \sin x dx$ 发散.

7. (15 分) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的正项级数, 并且 $\{a_n\}$ 单调下降收敛于零.

证明: $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛, 而且 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

请注意:全部答案必须写在答题纸上, 否则不给分。

8. (10分) 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln(1+\frac{1}{n})} \right)$ 的敛散性.

9. (10分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} x^n$ 的收敛半径与收敛域.

10. (15分) 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin \frac{1}{4^n x}$ 在 $(0, +\infty)$ 中不一致收敛,
但其和函数在 $(0, +\infty)$ 中连续.

11. (10分) 讨论函数 $f(x, y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & , \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , \quad x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

在 $(0, 0)$ 处的连续性、可导性与可微性.

12. (15分) 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 证明等式:

$$\left[\int_0^a f(x) dx \right]^2 = 2 \left[\int_0^a f(x) dx \int_x^a f(y) dy \right].$$