温州大學

2007 年研究生入学考试试题

考试科目：　高等代数（A）　　　　　　　　报考学科、专业：应用数学

请注意:全部答案必须写在答题纸上，否则不给分。

1 （10 分）已知 $f(1)=1,\ \ f(2)=2,$ **求多项式** $f(x)$ **除以** $(x-1)(x-2)$ **的余式。**

2 （10 分）证明：如果 $(f(x),g(x))=1,$ **那么** $(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1.$

3 （15 分）证明：

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \end{vmatrix}=(x_1+x_2+x_3+x_4)\prod_{1\le i<j\le 4}(x_j-x_i).$$

4 （10 分） 设 A 是 n 阶非奇异矩阵，α **是 n 维列向量，b 为常数。记分块矩阵**

$$P=\begin{pmatrix} E & O \\ -\alpha' A^* & |A| \end{pmatrix},\qquad Q=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha' & b \end{pmatrix},$$

A^* **是 A 的伴随矩阵。(1)计算** PQ **并简化；(2)证明 Q 可逆的充要条件是** $\alpha' A^{-1}\alpha\neq b.$

5 （30 分） 设 A，B 是 n 阶方阵，齐次线性方程组 AX=0 和 BX=0 分别有 k, m 个线性无关的解向量。(1)证明(AB)X=0 至少有 max(k. m)个线性无关的解向量；(2)若 k+m>n. 证明(A+B)X=0 必有非零解；（3）如果 AX=0 和 BX=0 无公共的非零解向量，且 k+m=n. 证明 F^n **中任一向量可唯一表成** $\alpha=\beta+\gamma,\ \ \beta,\gamma$ **分别是 AX=0 和 BX=0 的解向量。**

6 （15 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ **为一线性无关的向量组，**β **为向量。证明：要么向量组**

$\alpha_1+\beta,\alpha_2+\beta,...,\alpha_n+\beta$ **线性无关，要么向量组** $\alpha_1-\beta,\alpha_2-\beta,...,\alpha_n-\beta$ **线性无关。**

7 （20 分） 设 $A=(a_{ij})$ **是一 n 级下三角矩阵。证明:（1）如果 A 的主对角线元素互异，则 A 与一对角矩阵相似;（2）如果 A 的主对角线元素相等，且 A 不是对角矩阵，则 A 不与对角矩阵相似。**

8（10 分）设 A_{mn} **是实矩阵,E 为 n 级单位矩阵。已知矩阵** $B=\lambda E+A'A.$ **证明:当** $\lambda>0$ **时，矩阵 B 为正定矩阵。**

9 （30 分）已知二次曲面方程为 $2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3=1.$ **（1）求正交变换把该二次曲面的方程化为标准形;（2）上述二次曲面的方程表示何种曲面?**