温州大學

2008年硕士研究生招生入学考试试题

科目代码及名称: 816 高等代数A　　　　适用专业: 应用数学

（请考生在答题纸上答题，在此试题纸上答题无效）

1 （15分）证明或举例说明以下命题是否成立

1) a **为多项式** $f(x)$ **的** $m+1$ **重根，则** a **为** $f'(x)$ **的** m **重根;**

2) a **为多项式** $f'(x)$ **的** m **重根，则** a **为** $f(x)$ **的** $\mathrm{m}+1$ **重根。**

2 （10分）计算 $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$ **,其中** $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$ **。**

3 （10分）设 A,B **都是** n **阶方阵，且** $AB=0$ **，证明** $R(A)+R(B)\leq n$ **。**

4 （20分）设 η **是非齐次线性方程组** $Ax=b$ **的一个解,** $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ **是对应的齐次线性方程组的一个基础解系，证明:(1)** $\eta,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ **线性无关；(2)** $\eta,\eta+\xi_1,\cdots,\eta+\xi_{n-r}$ **线性无关。**

5 （20分）非齐次线性方程组 $\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=-2, \\ x_1-2x_2+x_3=\lambda, \\ x_1+x_2-2x_3=\lambda^2. \end{cases}$ **当** λ **取何值时有解？并求出它的解。**

6 （20分）设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ **是n维线性空间** V **的一组基,** A **是一** $n\times s$ **矩阵,** $(\beta_1,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A.$ **证明:** $\mathrm{L}(\beta_1,\cdots,\beta_s)$ **的维数等于A的秩.**

7 （20分）设V是数域P上n维线性空间，σ是V上的线性变换，且在P中有n个不同的特征根$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，$\alpha\in V$. 证明：$\alpha,\sigma\alpha,\sigma^2\alpha,\cdots,\sigma^{n-1}\alpha$线性无关的充分必要条件是$\alpha=\sum_{i=1}^{n}\beta_i$，其中$\beta_i$是$\sigma$相应于$\lambda_i$的特征向量，$i=1,2,\cdots,n.$.

8 （10分）设A为$m\times n$实矩阵，E为n级单位矩阵。已知矩阵$B=\lambda E+A'A$，其中A'表示矩阵A的转置矩阵，试证明：当$\lambda>0$时，矩阵B为正定矩阵。

9 （25分）证明：（1）每一个n阶实可逆矩阵A都可表示为为A=TB，其中T是正交矩阵，B是实的上三角形矩阵且对角线上的元素都是正数；（2）上述表示法是唯一的。