温州大学 2009 年研究生入学考试《数学分析》 (A) 试题

1. $(7\times 6' = 42$ 分) 计算下列各题 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$;

(2) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x-a}$; (3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{-x}$;

(4) 用逐项求导方法求幂级数的和函数： $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$;

(5) 计算反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x$, 其中 $b>a>0$;

(6) 计算 $I=\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中 L 为任一不包含原点的闭区域的边界线;

(7) 设 $F(x,y)=\int_{\frac{x}{y}}^{xy}(x-yz)f(z)\mathrm{d}z$, 求 F_{xy}.

2. (8 分) 用函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{2}{3}$; (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

3. (10 分) 叙述函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 的归结原则，并用它证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 不存在.

4. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续 (则有界), 用确界原理证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在最大值.

5. (10 分) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, x\geq 3,\\ ax+b, x<3.\end{cases}$ 求 a,b 的值，使 $f(x)$ 在 $x=3$ 处可导.

6. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

7. (10 分)　在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上求出一点，使曲线在此点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

8. (10 分)　求证：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$, 并计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$ 的值.

9. (10 分)　设正项级数 $\sum a_n$ 收敛，证明 $\sum a_n^2$ 也收敛，并举例说明反之不一定成立.

10. (10 分)　证明函数 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 连续且偏导数存在，但在此点不可微.

11. (10 分)　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，应用重积分的性质证明不等式

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x, \text{其中 } b>a.$$

12. (10 分)　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,A]$ 上连续，证明：

$$\lim_{h\to 0}\int_a^x [\frac{f(t+h)-f(t)}{h}]\mathrm{d}t = f(x)-f(a), \quad x\in(a,A).$$