温州大學

2010年硕士研究生招生入学考试试题

科目代码及名称：816 高等代数（A）　　　　适用专业：应用数学

（请考生在答题纸上答题，在此试题纸上答题无效）

1 （12分）、设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$，其中 $a_1,a_2\cdots,a_{n-1}$ 是互不相同的数。

（1）证明 $f(x)$ 是一个 $n-1$ 次多项式；

（2）求出 $f(x)$ 的所有根。

2 （24分）、 设 n 阶矩阵 A、B 满足条件：$A+B=AB$。

（1）证明 $A-E$ 是可逆矩阵；

（2）证明 $AB=BA$；

（3）如果 $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，试求 A。

3（10分）、已知 A、B 均为 n 阶正定矩阵，证明：$A+B$ 也是正定矩阵。

4（12分）、证明多项式 $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^p}{p!}$ 在有理数域上不可约，其中 p 为素数。

5（18分）、用正交线性替换把二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$$

化为标准形。

6（30 分）、设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是四维线性空间 V 的一个基，已知线性变换$\sigma$在这个基下的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$。(1)、求$\sigma$在另一个基$\eta_1=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_4$，$\eta_2=3\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4$，$\eta_3=\alpha_3+\alpha_4$，$\eta_4=2\alpha_4$下的矩阵；(2)、求$\sigma$的值域和核；(3)、在$\sigma$的核中选取一个基，把它扩充为 V 的一个基，并求$\sigma$在这个基下的矩阵。

7（20 分）、令$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$R^n$中$r$个线性无关的列向量，证明：存在含$n$个未知量的齐次线性方程组，使得$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是它的一个基础解系。

8（12 分）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$是欧氏空间$R^n$中的一个正交向量组，$\beta_1$，$\beta_2\in R^n$且有：$(\beta_1,\alpha_i)=(\beta_2,\alpha_i)=0,\ i=1,2,\cdots,n-1$。证明：$\beta_1$，$\beta_2$必线性相关。

9（12 分）、设 A 是 n 阶实对称矩阵，且$A^2=E$。证明：存在正交矩阵 T，使

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_{n-r} \end{pmatrix}。$$