温州大學

2010年硕士研究生招生入学考试试题

科目代码及名称： 619 量子力学A　　适用专业：理论物理 凝聚态物理

（请考生在答题纸上答题，在此试题纸上答题无效）

1. （20分）请证明：$[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B$；$[A,BC]=[A,B]C+B[A,C]$。

若定义反对易式：$[A,B]_+=AB+BA$，请进一步证明：

$$[AB,C]=A[B,C]_+-[A,C]_+B\text{；}[A,BC]=[A,B]_+C-B[A,C]_+\text{。}$$

2. （25分）已知某一维运动微观粒子的波函数为：

$$\psi_n=\begin{cases}A\sin\dfrac{n\pi}{a}(x+a), & |x|<a\\ 0, & |x|\ge a\end{cases}$$

求归一化常数A。

3. （25分）设一个处在宽度为a的无限深势阱中的微观粒子，其归一化的能量本征波函数为

$\psi_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\dfrac{n\pi x}{a}$，求：在能量表象中粒子坐标算符和动量算符的矩阵表示。（提示：任何力学量算符$\hat{F}$的矩阵元是：$F_{mn}=\int_0^a\psi_m^*\hat{F}\psi_n\,dx$）

4. （30分）已知$\hat{\sigma}_x=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，$\hat{\sigma}_y=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}$，$\hat{\sigma}_z=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$分别是三个Pauli算符在$\hat{\sigma}_z$表象中的矩阵表示，请在$\hat{\sigma}_z$表象中分别求出$\hat{\sigma}_x,\hat{\sigma}_y,\hat{\sigma}_z$的本征值和归一化的本征态。

5.（25分）一维谐振子的哈密顿算符为：

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^{2}}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^{2}x^{2}$$

引入无量纲算符：$\hat{Q}=\sqrt{\frac{m\omega}{\eta}}x$；$\hat{P}=\sqrt{\frac{1}{m\omega\eta}}\hat{p}$；$\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{Q}+\mathrm{i}\hat{P}\right)$，$\hat{a}^{+}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{Q}-\mathrm{i}\hat{P}\right)$。

计算：（1）$\left[\hat{Q},\hat{P}\right]$，$\left[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}\right]$，$\left[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right]$，$\left[\hat{a}^{\dagger},\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right]$；（2）将 $\hat{H}$ 用 $\hat{a}$ 与 $\hat{a}^{\dagger}$ 表示。

6. （25 分）设 t=0 时，粒子的状态为

$$\psi(x)=A[\sin^{2}kx+\tfrac{1}{2}\cos kx]$$

已知与动量本征值 $p_k=k\mathrm{h}$ 相应的本征波函数为 $\phi_k=\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi\mathrm{h}}}$，求：（1）将 t=0 时粒子的状态波函数 $\psi(x)$ 表达为动量本征波函数的叠加形式；（2）求 t=0 时粒子的平均动量和平均动能。