温州大學

2011年硕士研究生入学考试试题

科目代码及名称： 619 量子力学A　　　　适用专业：理论物理　凝聚态物理

（请考生在答题纸上答题，在此试题纸上答题无效）

1.（20分）简述题：

（1）简述波函数$\psi(x,y,z,t)$的统计解释；

（2）简述量子态叠加原理。

2.（30分）一维无限深势阱

$$U(x)=\begin{cases}\infty, & (x<0\text{ 或 }x>a)\\ 0, & (0\le x\le a)\end{cases}$$

中运动的粒子的能量本征函数为 $$\psi_n=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\dfrac{n\pi x}{a} & (x<0\text{ 或 }x>a)\\ 0 & (0\le x\le a)\end{cases}$$ ，相应的能量本征值为 $$E_n=\frac{\pi^2\hbar^2n^2}{2\mu a^2}(n=1,\ 2,\ \cdots)$$ 。若粒子初始状态的波函数为 $\psi(x)=A\cos\dfrac{\pi x}{a}\sin\dfrac{2\pi x}{a}$ ，求：（1）归一化常数A；（2）粒子能量的可能取值；（3）粒子能量的平均值。

3. （30分）已知角动量算符关系式 $\hat{\vec{l}}^{\,2}=\hat{l}_x^2+\hat{l}_y^2+\hat{l}_z^2$ ，以及角动量各分量间的对易关系 $[\hat{l}_\alpha,\hat{l}_\beta]=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}i\hbar\hat{l}_\gamma,\ \alpha,\beta,\gamma\in\{x,y,z\}$ ，其中Levi-Civita符号 $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ 在下标为 xyz 时等于1，即 $\varepsilon_{xyz}=1$ ，当任何两个相邻下标交换位置时改变正负号，例如：$\varepsilon_{xyz}=-\varepsilon_{xzy}$，有两个下标相同时为0，例如：$\varepsilon_{xxz}=0$ 。请证明：$[\hat{\vec{l}}^{\,2},\hat{l}_\alpha]=0,\ \alpha=x,y,z$ 。

4. （30分）一维线性谐振子的哈密顿算符可表示为 $$\hat{H}=\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right),$$ 其本征方程为 $$\hat{H}\left|n\right\rangle=\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right)\left|n\right\rangle=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\left|n\right\rangle,$$ 其中产生算符 $\hat{a}^\dagger$ 与消灭算符 $\hat{a}$ 满足以下关系式：

$$[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1,\quad \hat{a}\left|n\right\rangle=\sqrt{n}\left|n-1\right\rangle,\quad \hat{a}^\dagger\left|n\right\rangle=\sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle$$

且与坐标算符及动量算符之间满足如下关系：

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right), \quad \hat{p} = \frac{1}{i\sqrt{2}}\left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger\right)$$
。

能量本征态之间满足正交归一性关系 $\langle n | n' \rangle = \delta_{nn'}$。
请计算以下算符矩阵元：

$$\langle n | \hat{H} | n' \rangle; \quad \langle n | \hat{x} | n' \rangle; \quad \langle n | \hat{x}^2 | n' \rangle.$$

5. （20 分）若函数 $f(x)$ 存在任意阶导数，则相应的算符函数可有以下泰勒展开式：

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} A^n$$

其中上标 (n) 表示 n 阶导数。已知 $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$，

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, x \in (-\infty, \infty)$$

。请证明：

$$e^{i\lambda\sigma_z} = \cos\lambda + i\sigma_z \sin\lambda \quad (\lambda\text{为常数})$$

6. （20 分）角动量 z 分量算符为 $\hat{l}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$， 求 $\hat{l}_z$ 的本征态和本征值（提示：体系的状态在绕 z 轴旋转 2π 后保持不变）。