温州大學

2011年硕士研究生招生入学考试试题

科目代码及名称： 618 数学分析 A　　　　适用专业：070104 应用数学

（请考生在答题纸上答题，在此试题纸上答题无效）

一、填空（每题 5 分，共 20 分）

1、设在$[a,b]$上$f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)>0$；又设$S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$S_2=f(b)(b-a)$，$S_3=\frac{1}{2}[f(b)+f(a)](b-a)$。则$S_1$、$S_2$、$S_3$的大小关系是

2、设$A_k=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots\quad(k\geq 2)$，则$\sum_{k=2}^{+\infty}A_k=$

3、若$f(x)=\begin{cases} x^\alpha\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$的导函数$f'(x)$在点$0$处连续，则$\alpha$的取值范围是

4、若反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$收敛，则$m$与$n$的关系是

二、计算题（每题 11 分，共 55 分）

5、设$a>0$，求数列极限$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a^n}{1+a^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

6、设$f(u,v,w)$可微，$f_2'-f_3'\neq 0$，方程$f(x-y,y-z,z-x)=0$确定隐函数$z=z(x,y)$。求全微分$\mathrm{d}z$。

7、设曲线积分$\int_C(f(x)-e^x)\sin y\mathrm{d}x-f(x)\cos y\mathrm{d}y$与路径无关，其中$f(x)$有一阶连续导数，且$f(0)=0$。试求$f(x)$。

8、设S为锥面$x^2+y^2=z^2$（$0\leq z\leq 2$）的外侧，求$\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

9、设$f(x)$具有二阶导数，$f(0)=0$，$g(x)=\begin{cases} \frac{f(x)}{x} & x\neq 0 \\ f'(0) & x=0 \end{cases}$。求导函数$g'(x)$，并讨论$g'(x)$在点$0$处的连续性。

三、证明题（每题 15 分，共 75 分）

10、设$f(x)$在$[a,b]$上可导，$f(a)=f(b)=0$，$f'(a)\cdot f'(b)>0$。求证：

（1）存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=0$；　（2）存在$\eta\in(a,b)$，使得$f''(\eta)=0$。

11、设$f(x)$在$[a,b]$可导，$f(a)=0$，$f(b)=1$。求证：

（1）存在$c\in(a,b)$，使得$f(c)=\frac{1}{2}$；

（2）存在ξ、$\eta\in(0,1)$，$\xi\neq\eta$，使得$\dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{1}{f'(\eta)}=2(b-a)$。

12、设$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$（$n\geq 1$）。

（1）求 a_n+a_{n+2}；

（2）求证：对任意$\lambda>0$，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{n^\lambda}$收敛。

13、设$a_n>0$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$发散。证明下列结论：

（1）若$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{1+a_n}=0$，则$\{a_n\}$收敛，并且$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$；

（2）$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{1+a_n}$发散。

14、设$f_n(x)=xn^k\mathrm{e}^{-nx}$，$0\leq x<+\infty$ $(n=1,2,\cdots)$。证明：当$k<1$时$\{f_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上一致收敛于 0；$k\geq 1$时$\{f_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上不一致收敛。