宁波大学2009年攻读硕士学位研究生

入学考试试题(答案必须写在答题纸上)

考试科目: 数学分析 (A卷) 考码: 610 专业名称: 基础数学、应用数学

一. 填空题(每题5分,共15分)

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+5^n+\left(\frac{9}{2}\right)^n}$ (n次根) = ________。

2. 积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\tan x)^{2009}}dx=$ ________。

3. 设 $L:4x^2+9y^2=1$,方向逆时针, 则 $\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+9y^2}=$ ________。

二. 单项选择题(每题5分,共15分)

1. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 则下面说法不正确的是(　　)。

(A) $f(x)$是连续函数; (B) $f(x)$在$x=0$处可导;
(C) $f(x)$在任意点可导; (D) $f'(x)$是连续函数。

2. 设$f(x)$在$x=0$可导,且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=1$,则(　　)。

(A) $f(0)<0$; (B) $f'(0)<0$;
(C) $f(0)$为极小值; (D) $f(0)$为极大值。

3. 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(1-\cos\frac{\alpha}{n})$ $(\alpha>0)$是(　　)。

(A) 发散; (B) 收敛性与α有关; (C) 条件收敛; (D)绝对收敛。

宁波大学2009 年攻读硕士学位研究生

入学考试试题(答案必须写在答题纸上)

考试科目: 数学分析 (A 卷) 考码: 610 专业名称: 基础数学、应用数学

三. 计算题(一)(每题 9 分,共 27 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^{t^2}dt-x-\dfrac{x^3}{3}}{(x-\sin x)x^2}$.

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2}{n^3}-\dfrac{4}{3}\right)$.

3. 把 $f(x)=\dfrac{1}{3+5x-2x^2}$ 展开成 x 的幂级数,并指出它的收敛区间.

四. 计算题(二)(每题 11 分,共 22 分)

1. $I=\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz$,其中积分区域 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 与柱面 $z^2=x^2+y^2$ 所围成的立体.

2. 求 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dS$,其中 Σ: $x^2+z^2=4,(0\le y\le 1)$.

五. 讨论题(第 **1** 题 **12** 分,第 **2** 题 **11** 分,共 **23** 分)

1. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^p}(0<x<\pi,p>0)$ 的敛散性(包括绝对收敛性与条件收敛性).

2. 讨论偏导存在能否推出可微?若能请给出证明,若不能请举出反例并加以说明.

六. 证明题(每题 **12** 分,共 **48** 分)

1. 证明: $\sqrt{1+\dfrac{x^4}{4}}-\dfrac{x^2}{2}>\cos x,\quad x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$.

2. 证明: $f(x)=x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ 在 $[2,+\infty)$ 上一致连续.

宁波大学2009 年攻读硕士学位研究生

入 学 考 试 试 题(答案必须写在答题纸上)

考试科目：数学分析 (A 卷) 考码：610 专业名称：基础数学、应用数学

3.已知 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$。利用变换 $u=x+y$，$v=x-y$，$w=xy-z(x,y)$ 证明 $w=w(u,v)$ 满足偏导数方程

$$2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=1.$$

4．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调增函数，且 $f(a)>a, f(b)<b$. 证明：必存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=x_0$.