宁波大学 2010 年攻读硕士学位研究生

入学考试试题(答案必须写在答题纸上)

考试科目: 高等代数 (A卷) 考码: 811 专业名称: 基础数学、应用数学

一.（20分）

1. 写出判别多项式 $f(x)$ 在有理数域上不可约的艾森斯坦因判别法，并给出证明.

2. 求多项式 $f(x)=x^5-1$ 在有理数域上的因式分解，要求给出证明.

二. (20分) 设 n 元线性方程组 $AX=B$，A' 表示矩阵 A 的转置矩阵，其中

$$A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{pmatrix}, X=(x_1 \quad \cdots \quad x_n)', B=(1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)'$$

1. 证明：$|A|=(n+1)a^n$.

2. 当 a 为何值时，方程组有唯一解，并求 x_1.

3. 当 a 为何值时，方程组有无穷多解，并求通解.

三. (15分)

1. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是线性空间 V 中的向量组，证明：生成子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 的维数等于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩.

2. 设 V 中向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，求子空间

$W=L(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1)$ 的维数和一组基.

四. (20分) 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2-x_3^2-8x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$，

1. 用正交变换将此二次型化为标准形，并写出所作的变换.

2. 写出此二次型的规范形.

3. 判断此二次型是否为正定二次型？要求说明理由.

宁波大学 2010 年攻读硕士学位研究生

入 学 考 试 试 题(答案必须写在答题纸上)

考试科目：高等代数 (A 卷) 考码：811 专业名称：基础数学、应用数学

五. (20 分) 设 $\alpha_1=(1,2,1,-2),\alpha_2=(2,3,1,0),\alpha_3=(1,2,2,-3)$， $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，

$$\beta_1=(1,1,1,1),\beta_2=(1,0,1,-1),\beta_3=(1,3,0,-4)，\quad V_2=L(\beta_1,\beta_2,\beta_3)，$$

1. 证明：子空间 $V_1\cap V_2$ 的维数等于齐次线性方程组

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\beta_1+x_5\beta_2+x_6\beta_3=0$ 的解空间的维数.

2. 求子空间 V_1+V_2、$V_1\cap V_2$ 的维数与一组基.

六. (15 分)

在 P^3 中，给定两组基 $\begin{cases}\varepsilon_1=(1,0,1)\\ \varepsilon_2=(2,1,0)\\ \varepsilon_3=(1,1,1)\end{cases}$， $\begin{cases}\eta_1=(1,2,-1)\\ \eta_2=(2,2,-1)\\ \eta_3=(2,-1,-1)\end{cases}$，作线性变换 $T\varepsilon_i=\eta_i,i=1,2,3$

求：线性变换 T 分别在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 与基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵.

七. (10 分) 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 级实对称矩阵, 在 R^n 中定义内积 $(\alpha,\beta)=\alpha A\beta'$，其中

$$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)，$$

证明：R^n 关于上述内积成欧氏空间的充分必要条件是 A 为正定矩阵.

八. (15 分) 设 T 为 n 维线性空间 V 的线性变换, 且 $T^2=T$，证明：

1. T 的特征值为 1 或 0 .
2. T 的值域 $TV=\{\eta\mid T\eta=\eta,\eta\in V\}$.
3. $TV\oplus T^{-1}(0)=V$.

九. (15 分) 证明：任意一个 n 阶方阵 A 都可写成 $A=D+N$ 的形式, 其中 D 能与对角矩阵相似, N 是幂零矩阵（即存在正整数 m 使 $N^m=0$）,并且 $DN=ND$.