宁波大学 2011 年攻读硕士学位研究生

入学考试试题(答案必须写在答题纸上)

考试科目: 数学分析　(A 卷) 考码: 601　专业名称: 基础数学、应用数学

一. 填空题（每题 5 分，共 15 分）

1．$\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^2\ln\dfrac{1+x}{x}\right)=$______________;

2．若$f(x)=\arctan x$,则$f^{(99)}(0)=$______________;

3．定积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x+\cos x}{1+\sin^2 x}dx=$______________。

二. 单项选择题（每题 5 分，共 15 分）

1．若(　　　　　)成立，则$f(x)$在$[a,b]$上必不可积(黎曼可积).

（A）$f(x)$在$[a,b]$上有无穷多个间断点;

（B）$f(x)$在$[a,b]$上只有有限个间断点;

（C）$|f(x)|$在$[a,b]$上不可积;

（D）$f(x)$在$[a,b]$上非单调.

2．若(　　　　　)，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

（A）$\lim_{n\to\infty}u_n=0$;　　（B）部分和数列$\{S_n\}$有界;

（C）对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数N，当$n>N$时对任意正整数p都有$\left|\sum_{k=n}^{n+p}u_n\right|<\varepsilon$;

（D）对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数N，当$n>N$时有$\left|\sum_{k=n}^{2n}u_n\right|<\varepsilon$.

3. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在$[a，b]$一致收敛，且 $a_n(x)$可导（n=1,2…），那么(　　　　)

$(A) f(x)$在$[a,b]$上可导,且$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(x)$;

$(B) f(x)$在$[a,b]$上可导,但$f'(x)$不一定等于$\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(x)$;

$(C)\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(x)$点点收敛,但不一定一致收敛.

$(D)\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(x)$不一定点点收敛.

三．判断讨论题，正确的给出证明，错误的举出反例（每小题 5 分，共 20 分）

(1)若$f(x)$在R上有定义,且在所有的无理点处连续,则$f(x)$在R上处处连续.

(2)若二元函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的二个累次极限存在且相等,
则$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的重极限一定存在.

(3)若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0,\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=a$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=a$.

(4)若函数$f(x)$在x_0的某个领域$U(x_0)$内可导,且$f'(x_0)>0$,则$f(x)$在$U(x_0)$内严格单调增.

四.计算题（每题 8 分，共 48 分）

1．设$f(x)=\max\{1,x\}$,求$f(x)$的原函数.(max 表示最大值函数)

2．已知$a_1,a_2,....,a_n>0,(n\ge 2)$且$f(x)=\left(\dfrac{a_1^x+....+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$,试求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

3．计算第二类曲线积分

$$\int_L\sqrt{x^2+y^2}\,dx+y\left(xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dy,$$

其中.$L=\{(x,y):y=\sin x,0\le x\le\pi\}$,方向为$(0,0)\to(\pi,0)$.

4. 设$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$,

证明$f(x,y)$在$(0,0)$处连续并计算$f_x(0,0)$.

5. 设$y=y(x)$由$x+y-e^{x-y}=1$确定,求$y=y(x)$的极值和极值点.

6. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$的收敛域及和函数.

五. 证明题（共 52 分）

1(10分).设$f(x)$连续,$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a$($a$为常数).
求$\varphi'(x)$,并讨论$\varphi'(x)$在$x=0$处的连续性.

2(12分).对于每个正整数$n(n\geq 2)$,证明方程

$$x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x=1$$

在$(0,1)$内必有惟一的实根,并求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

3(15分).设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且$f(0)=f(1)=0$,
$f(\dfrac{1}{2})=1$.证明:

(1)存在$\zeta\in(\dfrac{1}{2},1)$,使得$f(\zeta)=\zeta$;

(2)对于任意实数λ,必存在$\eta\in(0,\zeta)$,使得$f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1$.

4(15分).设$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n+x}$,

(1)证明$f(x)$在$[0,+\infty)$上可导,且一致连续.

(2)证明反常积分$\int_0^{+\infty}f(x)dx$发散.