

宁波大学 2012 年攻读硕士学位研究生

入学考试试题(答案必须写在答题纸上)

考试科目: 量子力学 (A 卷) 考码: 812 专业名称: 理论物理、凝聚态物理、光学、光电子学、固体电子物理

一、简答题(每题 5 分, 共 30 分)

1. 量子力学中, 体系的任意态 $\psi(x)$ 可用一组力学量完全集的共同本征态 $\psi_n(x)$ 展开:
$$\psi(x) = \sum_n c_n \psi_n(x)$$
, 写出展开系数 c_n 的表达式。
2. 一个粒子波函数为 $\psi(x, y, z)$, 则粒子位于 $x \sim x + dx$ 之间的概率是多少?
3. 对于球对称势垒的低能散射, 第 l 个分波的相移正负号如何?
4. 厄米算符 \hat{A} 与 \hat{B} 对易, 而 \hat{B} 又与 \hat{C} 对易, 则 \hat{A} 与 \hat{C} 是否一定也对易? 若不是, 试举例说明。
5. 对于定态, 是否概率流密度必为零?
6. 某体系由 3 个全同的玻色子组成, 玻色子之间无相互作用。玻色子只有 2 个可能的单粒子态 ψ_1 和 ψ_2 。问: 体系的可能状态有几个? 它们的波函数怎样用单粒子波函数构成?

二、(本题 10 分) 设 \hat{A}, \hat{B} 为矢量算符, \hat{F} 为标量算符, 证明

$$[\hat{F}, \hat{A} \cdot \hat{B}] = [\hat{F}, \hat{A}] \cdot \hat{B} + \hat{A} \cdot [\hat{F}, \hat{B}].$$

三、(本题 15 分) 一个算符 \hat{f} 描述自旋 1/2 的粒子间的相互作用, 具有形式 $\hat{f} = a + b \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$, 其中 a, b 是常数。总自旋 $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \frac{\hbar}{2}(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$ 。试证明 \hat{f} , \hat{S}^2 , \hat{S}_z 可同时测量。

四、(本题 15 分) 已知描述单粒子一维束缚态的两个本征函数分别为:

$$\psi_1 = A e^{-ax^2/2}, \quad \psi_2 = B(x^2 + bx + c)e^{-ax^2/2},$$
 试求这两个状态的能级间隔。

五、(本题 20 分) 泡利矩阵在 $\hat{\sigma}_z$ 表象中可以明确地写作

$$\hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \hat{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(1) 求 $\hat{\sigma}_x$ 在 $\hat{\sigma}_z$ 表象中的本征态矢量;

(2) 求 $\hat{\sigma}_z$ 表象到 $\hat{\sigma}_x$ 表象的变换矩阵 \hat{S} ;

(3) 证明: $\hat{S}^+ \hat{\sigma}_x \hat{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 。

宁波大学 2012 年攻读硕士学位研究生

入学考试试题(答案必须写在答题纸上)

考试科目: 量子力学 (A 卷) 考码: 812 专业名称: 理论物理、凝聚态物理、光学、光电子学、固体电子物理

六、(本题 20 分) 在 $t=0$ 时刻, 氢原子的波函数为

$$\psi(r,0) = \frac{1}{\sqrt{10}} [2\psi_{100} + \psi_{210} + \sqrt{2}\psi_{211} + \sqrt{3}\psi_{21-1}]。忽略自旋和辐射跃迁,$$

- 问: (1) $t=0$ 时刻该体系能量的平均值是多少? (用氢原子基态能量表达)
(2) 在 t 时刻体系处于 $l=1, m=1$ 态的概率是什么?

七、(本题 20 分) 一个质量为 m 的粒子, 被限制在一维区域 $0 \leq x \leq a$ 内 (即处于一维无限深势阱内)。 $t=0$ 时其归一化的波函数为

$$\psi(x,t=0) = \sqrt{\frac{8}{5a}} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \sin \frac{\pi x}{a}$$

- (1) $t=0$ 时粒子所处的状态是不是能量的本征态?
(2) 在后来的某一时刻 $t=t_0$ 时波函数是什么?
(3) 体系在 $t=0$ 和 $t=t_0$ 时的平均能量是多少?

八、(本题 20 分) 试用变分法求解 $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + bx^4$ 的基态能量, 其中 b 是一个常数。试探波函数取为 $\phi(x) = Ae^{-\lambda x^2}$, A 是归一化常数。

[以下式子仅供参考, 可能并非完全必要。]

对于 $a > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$