宁波大学 2012 年攻读硕士学位研究生

入学考试试题(答案必须写在答题纸上)

考试科目: 高等代数 (A卷) 考码: 811 专业名称: 基础数学、应用数学

一. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 整系数多项式 $3x^4+5x^3+x^2+5x-2$ 的有理根为________

2. 设A,B为3阶矩阵，且 $|A|=3, |B|=2, |A^{-1}+B|=2$, 则 $|A+B^{-1}|=$______

3. 已知 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 和 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似, 则 x,y的值为________.

4. 设$\alpha_1=(1,2,-1,0)',\alpha_2=(1,1,0,2)',\alpha_3=(2,1,1,k)'$ 所生成的向量空间的维数为2,
   则 $k=$________. （A'为A的转置矩阵.）

5. 已知四阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1=3\alpha_2+\alpha_3$，
   如果 $\beta=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_4$，则线性方程组 $AX=\beta$ 的通解为____________.

二. 选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 下列关于多项式的说法不正确的是 (　　)

   A. 奇数次实系数多项式一定有实根；

   B. 若 $f(x)$ 在有理数域上可约，则 $f(x)$ 一定存在有理根；

   C. 若 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$，则 $(f(x),g(x))=(g(x),r(x))$；

   D. 若 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式，则 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式.

2. 以下说法正确的是 (　　)

   A. 若两个向量组等价，则它们所含向量的个数相同；

   B. 若向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$ 线性无关，α_{r+1} 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出，
   则向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r+1}\}$ 也线性无关；

   C. 若向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$ 线性无关，则 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1}\}$ 也线性无关；

   D. 若向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$ 线性相关，则 α_r 一定可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1}$ 线性表出.

宁波大学 2012 年攻读硕士学位研究生

入 学 考 试 试 题(答案必须写在答题纸上)

考试科目: 高等代数 (A 卷) 考码: 811 专业名称: 基础数学、应用数学

3. 下列条件有几个是 n 阶矩阵 A 可对角化的充要条件? ( )

(1). A 有 n 个不同的特征值;

(2). A 有 n 个线性无关的特征向量;

(3). 对于 A 的每个特征值对应的特征子空间的维数等于该特征值的重数;

(4). A 的特征多项式无重根.

A. 1 个; B. 2 个; C. 3 个; D. 4 个.

4. 设 V 为欧氏空间, $\alpha,\beta,\delta,\gamma\in V$, k 为实数, 下列式中正确的是 ( )

A. $(\alpha+\beta,\ \gamma+\delta)=(\alpha,\ \gamma)+(\beta,\ \delta)$; B. $(k\alpha,\ \beta)=(\alpha,\ k\beta)$;

C. $|k\alpha|=k|\alpha|$; D. $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$.

5. 设 A 是 n 维线性空间 V 的线性变换, 则下列结论不正确的是. ( )

A. A 的核 $A^{-1}(0)$ 是 A 的不变子空间;

B. $AV=V$ 当且仅当 $A^{-1}(0)=\{0\}$;

C. AV 的维数 $+A^{-1}(0)$ 的维数 $=n$;

D. $AV\oplus A^{-1}(0)=V$.

三. 计算题 (共 70 分)

1. (12 分) 设 $\alpha_1=(1,1,1,2)^T,\alpha_2=(4,6,2a+7,10)^T,\alpha_3=(3,a+4,2a+5,a+7)^T$,

$\alpha_4=(2,3,2a+3,5)^T$,

(1) 判断 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是否线性相关?

(2) a 取何值时, α_4 不能用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,并求出 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩和一个极大无关组.

(3) a 取何值时, α_4 能用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

宁波大学 2012 年攻读硕士学位研究生

入 学 考 试 试 题(答案必须写在答题纸上)

考试科目: 高等代数 (A 卷) 考码: 811 专业名称: 基础数学、应用数学

2. (10 分) 计算下列 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} \lambda & \alpha & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ b & \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix}=$$

3. (12 分) 当 a , b 取何值时，下述线性方程组有解或无解？并在有解时,求其全部解。

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1 \\ 3x_1+2x_2+ax_3+7x_4=-1 \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=b \end{cases}$$

4. （12 分）设 $V=L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ 为四维线性空间，线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$，求线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的值域与核，并指出它们的维数和一组基.

5. (12 分) 在 P^3 中取两组基: $\begin{cases} \alpha_1=(1,1,0) \\ \alpha_2=(2,1,3) \\ \alpha_3=(1,2,1) \end{cases}$, $\begin{cases} \beta_1=(1,0,1) \\ \beta_2=(1,2,2) \\ \beta_3=(1,1,2) \end{cases}$,

(1). 求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵.

(2). 求向量 $\alpha=(a,b,c)$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标.

6. （12 分）设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3,

向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)',\alpha_2=(0,-1,1)'$ 是线性方程组 $AX=0$ 的两个解.

(1) 求 A 的所有特征值与特征向量.

(2) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 D，使得 $Q'AQ=D$.

宁波大学 2012 年攻读硕士学位研究生

入学考试试题(答案必须写在答题纸上)

考试科目: 高等代数 (A 卷) 考码: 811 专业名称: 基础数学、应用数学

四. 证明题:(共 40 分)

1. (10 分) 设$f(x)$为复数域上非零多项式,

(1) 证明:$f(x)$没有重因式当且仅当 $(f(x), f'(x)) = 1$.

(2) 证明: 若$f(x)$没有重因式,则$(f(x)+f'(x), f(x)) = 1$.

2.(10 分)设 A 是 n 维线性空间 V 上的线性变换,$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$是$A$的$s$个不同的特征值,$P_1, P_2, \cdots, P_s$是$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$对应的特征向量,

证明:(1). $P_1 + P_2 + \cdots + P_s$不是A的特征向量.

(2). 若 V 中每一非零向量都是 A 的特征向量, 则 A 是数乘变换.

3. (10 分) 设 $f(x_1, \cdots, x_n) = X'AX$ 是一实二次型,若有实 n 维向量 X_1, X_2使$X_1'AX_1 > 0, X_2'AX_2 < 0$, 证明: 必存在实 n 维向量 $X_0 \neq 0$使$X_0'AX_0 = 0$.

4.(10 分)设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换,证明:若秩($\boldsymbol{A}^2$)= 秩($\boldsymbol{A}$),则 $V = \boldsymbol{A}V \oplus \boldsymbol{A}^{-1}(0)$.