宁波大学 2012 年攻读硕士学位研究生

入 学 考 试 试 题(答案必须写在答题纸上)

考试科目：数学分析　　(A卷) 考码：610　　专业名称：基础数学、应用数学

一. 填空题（每题 5 分，共 15 分）

1. $\lim_{x\to 0}\sin(2x)\cdot[\frac{1}{3x}]=$________________;

2. $\int \ln\sqrt{2+x}dx=$________________;

3. $\int_a^b dx\int_c^d xye^{x^2+y^2}dy=$________________;

二. 单项选择题（每题 5 分，共 15 分）

1.已知当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 都是无穷小量，则当 $x\to x_0$ 时，下列中不一定是无穷小量的是（　　）。

(A) $|\alpha(x)|+\beta(x)$；(B) $\frac{\alpha(x)}{\beta^2(x)}$；(C) $e^{\alpha(x)\beta(x)}-1$；(D) $\ln(1+\alpha(x)\beta(x))$。

2.下列叙述正确的是（　　）

（A）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续;

（B）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导;

（C）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定存在原函数;

（D）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在无穷多个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 必不可积.

3. 若（　　），则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛.

（A）$\lim_{n\to\infty}u_n=0$;　　（B）部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛;

（C）部分和数列 $\{S_n\}$ 单调;　　（D）部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

宁波大学 2012 年攻读硕士学位研究生
入 学 考 试 试 题(答案必须写在答题纸上)

考试科目：数学分析　(A 卷) 考码：610　专业名称：基础数学、应用数学

三. 计算与证明题（一）（每题 8 分，共 40 分）

1. 设$f(x)=\begin{cases} e^x\cos x, & x\le 0 \\ ax^2+bx+c, & x>0 \end{cases}$,试确定$a,b,c$,使$f(x)$在$x=0$处二阶可导.

2.证明$f(x)=\ln x$在$[1,+\infty)$上一致连续.

3. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n},(a\ne -1)$

4.求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n-1}{n!}x^{2n}$的和函数,并由此求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n-1}{4^n n!}$的和.

5.利用高斯公式求积分：$\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中

(a) S 为立方体$0\le x,y,z\le a$的边界曲面外侧；

(b) S 为锥面$x^2+y^2=z^2(0\le z\le h)$下侧.

四. 计算与证明题（二）（每题 10 分，共 40 分）

1.设函数$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$.

(1)证明$f(x,y)$在$(0,0)$处连续;

(2)求$f(x,y)$在$(0,0)$处的偏导数;

(3)判断该函数在$(0,0)$处的可微性.

2.设方程组$\begin{cases} x+y+u+v=0 \\ x^2+y^2+u\cos v=0 \end{cases}$确定了可微函数组$\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$, 求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

3.设$f(x)$在$[a,b]$上有连续导函数,且$f(a)=f(b)=0,\int_a^b f^2(x)dx=2$.

求$\int_a^b xf(x)f'(x)dx$.

4.设曲线积分$\int\limits_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$与路径无关,$\varphi(x)$有连续导数且$\varphi(0)=0$.

求$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+y\varphi(x)dy$.

五. 讨论与证明题（每题 10 分，共 40 分）

1.讨论级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$的敛散性.

2.证明:若数列$\{a_n\}$无界,但非无穷大量.则必存在两个子列$\{a_{n_k}^{(1)}\}$与$\{a_{n_k}^{(2)}\}$,其中$\{a_{n_k}^{(1)}\}$是无穷大量,$\{a_{n_k}^{(2)}\}$是收敛子列.

3.设$f(x)$在$[a,+\infty)$上二阶可微,且$f(a)>0, f'(a)<0$,当$x>a$时,$f''(x)<0$.
证明:方程$f(x)=0$在$[a,+\infty)$内有唯一的一个实根.

4.若在区间I上对任何自然数n有$|u_n(x)|\le v_n(x)$.
证明:当级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$在$I$上一致收敛时,$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$I$上也一致收敛.