1999 年浙江大学研究生高等代数考研试题

一、$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个不相同的整数，证明 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)+1$ 在有理数域上可约的充分必要条件是 $f(x)$ 可表示为一个整数多项式的平方

二、设 $\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，且 $\alpha^T\alpha=0$，求(1) $\left|E_n-\alpha\alpha^T\right|$　　(2) $(E_n-\alpha\alpha^T)^{-1}$

(其中 E_n 为 n 阶单位阵，α^T 为 α 的转置)

三、矩阵 $A_{m\times n}$ 是行满秩(即秩 $A=m$)，证明：

(1)存在可逆阵 Q，使得 $A=(E_m,0)Q$

(2) 存在矩阵 $B_{n\times m}$，使得 $AB=E_m$

四、设 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 P^n 中 n 个线形无关的列向量，设 V_2 是由 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n$ 生成的子空间，V_1 是 $AX=0$ 的解空间，证明：$P^n=V_1\oplus V_2$ ($V_1\oplus V_2$ 表示 V_1 与 V_2 的直和)

五、设 A,B 都是 n 阶实对称矩阵，且 B 正定，则存在 S 及 $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$，使得 $A=SDS^T,B=SS^T$

六、设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$，满足下列条件：

(1)$0 \le a_{ij} \le 1, \forall i, j$ (2) $a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} = 1$ (i=1,2, ,n)

求证：(1) A 的每一个特征值 λ，都有 $|\lambda| \le 1$ (2) $\lambda_0 = 1$ 为 A 的一个特征

$\Re^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i 是实数 \right\}$，$A$是$n$阶正定阵，$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$\beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \Re^n$，

求证：(1) $(\alpha^T A\beta)^2 \le (\alpha^T A\alpha)(\beta^T A\beta)$ 等号成立当且仅当α与β线形相关时成立

（2）若A是正定矩阵，则 $(\alpha^T A\beta)^2 \le (\alpha^T A\alpha)(\beta^T A\beta)$ 也成立

八（1）设A, B分别为复数矩阵域上的k阶和l阶方阵，并且A, B没有公共的特征值，求证$AX = XB$只有空解（这里$X = (x_{ij})_{k\times k}$）

（2）在$\Re^{n\times n}$中，变换$\mathrm{A}: X \mapsto AX + XA, A \in \Re^{n\times n}$，A 为一个固定的矩阵，且A 的特征值不为（- A ）的特征值，求证：A 为一个线形变换。