

浙 江 大 学

2001 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 数学分析 编号 436

注意: 答案必须写在答题纸上, 写在试题纸或草稿上均无效。

一、(共 30%)

3x

- (A). (10%) 用“ $\epsilon-N$ 语言”证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 1}{3n^2 + 2n - 3} = \frac{1}{3}$
- (B). (10%) 设 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义且在 x_0 处不连续, 试给出不连续点的分类 (名称及定义); 若 f 在 x_0 的一个邻域内处处可导, 问 $f'(x)$ 的不连续点又可分为哪几类, 为什么?
- (C). (10%) 设 $f(x, y)$ 为二元函数, 在 (x_0, y_0) 附近有定义, 试讨论二重极限 $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f(x, y)$ 与累次极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ 之间的关系, 必要时, 请给出反例。

二、(共 30%)

11

- (A). (5%) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n})$
- (B). (5%) 求 $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\frac{1}{2}}$
- (C). (5%) 设 $y = y(x)$ 为 x 的可微函数, 求 $y'(0)$. 其中 $y = -ye^x + 2e^x \sin x - 7x$.
- (D). (8%) 求 $\int \frac{\sin x}{x^2 - 3x + 2} dx$.

$$\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| - \frac{1}{3} \frac{1}{x-1} + C$$
- (E). (7%) 求 $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ 在 $x_0 = 0$ 处的 Taylor 级数, 并求其收敛半径。

三、(共 20%)

- (A). (10%) 设 $z = z(x, y)$ 为 x, y 的二次可微函数。作自变量和因变量的变换, 取 u, v 为新的自变量, $w = w(u, v)$ 为新的因变量, 使得 $w = xz - y, u = \frac{z}{y}, v = x$, 请将方程 $y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{x}$ 变换为关于新变量 w, u, v 的方程。
- (B). (10%) 求 $\int_D (x^2 + y^2) dx dy$, 其中 D 是以 $y = x, y = x + a, y = a$ 及 $v = 3a (a > 0)$ 为边的区域。

四、(共 20%)

122 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[n^{1/2}]}}{n^p}$ 的敛散性 (对于收敛情形, 要区分条件收敛与绝对收敛), 其中 $p \in (0, \infty)$, $[a]$ 表示 a 的整数部分, 并证明当参变量 $p \in (\frac{1}{2}, \infty)$ 时为内闭一致收敛。