浙　江　大　学

二〇〇2年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目　高等代数　　　　编号　365

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一、设两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不全为零，求证：对于任意的正整数 n，有

$$(f(x),g(x))^n=(f(x)^n,g(x)^n).$$　　（本题 12 分）

二、设 $s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k,(k=0,1,2,\cdots);a_{ij}=s_{i+j-2},(i,j=1,2,\cdots,n)$.

计算行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$　　（本题 12 分）

三、设 A,B 都是 n 级矩阵，且 $A+B=AB$，求证：$AB=BA$.　　（本题 12 分）

四、设 A 是 $m\times n$ 级阵，A 的秩为 m，B 是 $n\times(n-m)$ 级矩阵，B 的秩为 $n-m$，

且 $AB=0$，如果 n 维列向量 η 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解，求证：存在唯一

的 $(n-m)$ 维列向量 ξ，使得 $B\xi=\eta$.　　（本题 12 分）

五、求 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),V_2=L(\beta_1,\beta_2)$ 的和与交的基与维数.

其中 $\begin{cases}\alpha_1=(1,2,-1,-2)\\ \alpha_2=(3,1,1,1)\\ \alpha_3=(-1,0,1,-1)\end{cases}$，$\begin{cases}\beta_1=(2,5,-6,-5)\\ \beta_2=(-1,2,-7,3)\end{cases}$　　（本题 11 分）

六、用正交线性替换化下面的实二次型为标准形，并写出所用的正交线性替换.

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$.（本题 20 分）

七. 设 A,B 是 n 级复矩阵，且 $AB=BA$，求证：存在一个 n 级可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵. （本题 8 分）

八. 设 A,B 是 n 级复矩阵，其中 A 是幂零矩阵（即存在正整数 m，使得 $A^m=0$）而且 $AB=BA$，求证：$|A+B|=|B|$. （本题 7 分）

九. 设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，σ 在 V 的某组基下的矩阵是 A，用 $Ker\sigma$ 表示 σ 的核，$\sigma(V)$ 表示 σ 的值域.

求证： 秩(A^2)=秩(A) 的充分必要条件是 $V=\sigma(V)\oplus Ker\sigma$. （本题 6 分）