

浙 江 大 学

二〇〇二年攻读硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析

一、(共 30%)

(A) (10%) 用“ $\varepsilon - \delta$ 语言”证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-1)}{x-3} = 0$;

(B) (10%) 给出一个一元函数 f ，在有理点都不连续，在无理点都连续，并证明之；

(C) (10%) 设 $f(x, y)$ 为二元函数，在 (x_0, y_0) 附近有定义，试讨论“ $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微”与“ $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 附近关于 x 、 y 的偏导数都存在”之间的关系，必要时，请给出反例。

二、(共 30%)

(A) (5%) 设 $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ ，数列 $\{x_n\}$ 由如下递推公式定义： $x_0 = 1$ ， $x_{n+1} = f(x_n)$ ， $(n = 0, 1, 2, \dots)$ ，求证： $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$ 。

(B) (5%) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\cos \frac{1}{x}} \right)^{x^2}$ 。

(C) (5%) 求 $f^{(n)}(0)$ ， $(n = 0, 1, 2, \dots)$ ， $f(0) = 0$ ， $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ (当 $x \neq 0$ 时)。

(D) (5%) 求不定积分 $\int \sqrt{1+x^2} dx$ 。

(E) (5%) 证明： $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1, \infty)$ 上连续可微。

三、(共 20%)

(A) (10%) 求第一型曲面积分 $I = \iint_{x^2+y^2+z^2=R^2} \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}}$ ，其中 $h \neq R$ 。

(B) (10%) 设 a 、 b 、 c 为三个实数，证明：方程 $e^x = ax^2 + bx + c$ 的根不超过三个。

四、(共 20%)

设 $f_n(x) = \cos x + \cos^2 x + \dots + \cos^n x$