浙 江 大 学

二〇〇三年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 高等数学　　编号 346

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一、填空（每题 5 分，共 45 分）

1. 函数 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2} & |x|\le 1\\ |x-1| & |x|>1\end{cases}$ 的间断点是________.

2. 曲线 $\begin{cases}x=3e^{-t}\\ y=2e^{t}\end{cases}$ 在 t=0 处的切线方程是________.

3. 当 $a=$___时，函数 $y=a\sin x+\cos 2x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 处取得极值，而且是极___值.

4. 函数 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$ 在 x=2，y=1 处的全微分 dz=________.

5. 设 a>0, a≠e，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n.n!}{n^n}$ 当 a ______时收敛.

6. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{n}{2n+1})^2,\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\ln(1+n)},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2+1}$ 中条件收敛的是________

7. 随机事件 A 与 B 互不相容，P(A)=0.2，P(B)=0.6，则条件概率 $p(\overline{B}\mid\overline{A})=$______.

8. 三封信随机地投入四个信箱，第一个信箱至少被投入一封信的概率是______.

9. 在区间（-2，1）内随机取三个数 x_1,x_2,x_3，则概率 $p\{ma(x_1,x_2,x_3)>0\}$ =________.

二、计算（每题 7 分，共 42 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+\sin^2\dfrac{x}{2})}{1-\sqrt{\cos x}}$.

2. 求 $y=\sin(x^2)\cos^2\dfrac{1}{x}$ 在 $x=-1$ 处导数 $y'(-1)$.

3. 设函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x+y-z-4+e^{-x-y}=e^{xz}$ 确定的隐函数，求偏导 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,-2)}$

4. 计算广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx$.

5. 计算二重积分 $\iint\limits_D \arctan\dfrac{y}{x}dxdy$，其中 D 由圆周 $x^2+y^2=1$，$x^2+y^2=4$，直线 $y=x$ 及 y 轴围成的位于第一象限内的闭区域.

6. 求方程 $(1-x^2)y''=xy'$ 在初始条件 $y(0)=1, y'(0)=2$ 下的特解.

三、(16 分)

设开口向下抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于（1，0），（3，0）两点，记抛物线与 x 轴围成平面图形为 D_1，与 x 轴、y 轴围成平面图形为 D_2.

求：（1）D_1 与 D_2 面积之比

（2）D_1、D_2 绕 X 轴旋转一周所生成的两个旋转体体积之比.

四、(10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ 的收敛区间（包括端点的讨论）以及在收敛区间内的和函数.

五、(6 分)

已知函数 $f(x)$ 在[a,b]上连续，在（a, b）内可导，$f(a)=f(b)=0$，求证在（a, b）内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=f(\xi)$.

六、(10 分)

设 ξ 是随机变量，$P(\xi\le\frac{1}{2})=\frac{1}{8}$，$\xi$ 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} Bx & 0\le x\le 1 \\ A-x & 1<x\le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求：（1）A，B.

（2）$\eta=-2\xi+1$ 的密度函数 $f_\eta(y)$.

七、（15 分）

已知随机变量(ξ,η)服从平面区域$D=\{(x,y)\mid y-1\le x\le 1-y, 0\le y\le 1\}$上均匀分布.

求：（1）(ξ,η)的联合概率密度函数$f(x,y)$，边缘密度函数$f_\xi(x), f_\eta(y)$.

（2）概率$P(\xi>\eta)$.

（3）协方差$COV(\xi,\eta)$.

八、（6 分）

某大批产品寿命 X 服从概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2000}e^{-\frac{x}{2000}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

的指数分布，现从中任取 100 件，用标准正态分布近似计算这 100 件产品平均寿命大于 2000 的概率.