浙 江 大 学

二〇〇三年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 高等代数 编号 344

注意:答案必须写在答题纸上,写在试卷或草稿纸上均无效。

注意:本试卷满分为 150 分

1. (20 分) 令 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 是 R^n 中 s 个线性无关的向量。证明:存在含 n 个未知量的齐次线性方程组,使得 $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s\}$ 是它的一个基础解系。

2. (20 分) 设有分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 其中 A,D 都可逆,试证:

(1) $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = det(A-BD^{-1}C)detD$;

(2) $(A-BD^{-1}C)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(CA^{-1}B-D)^{-1}CA^{-1}$.

(这里 det 表示矩阵所对应的行列式)

3. (20 分) 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4 \in V$, $W=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, 又有 $\beta_1,\beta_2 \in W$ 且 β_1,β_2 线性无关。求证:可用 β_1,β_2 替换 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 中的两个向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}$, 使得剩下的两个向量 $\alpha_{i_3},\alpha_{i_4}$ 与 β_1,β_2 仍然生成子空间 W, 也即 $W=L(\beta_1,\beta_2,\alpha_{i_3},\alpha_{i_4})$.

4. (20 分) 设 A 为 n 阶复矩阵,若存在正整数 n 使得 $A^n=0$, 则称 A 为幂零矩阵。求证: (1) A 为幂零矩阵的充要条件是 A 的特征值全为零; (2) 设 A 不可逆,也不是幂零矩阵,那么存在 n 阶可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 B 是幂零矩阵, C 是可逆矩阵.

5. (20 分) 已知实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 P 使得 $P^T AP$ 成为对角矩阵。

6. (20 分) 设 V 是 n 维欧氏空间, 内积记为 (α, β), 又设 T 是 V 的一个正交变换, 记 $V_1 = \{\alpha \in V \mid T\alpha = \alpha\}$, $V_2 = \{\alpha - T\alpha \mid \alpha \in V\}$. 试证明: (1) V_1, V_2 都是 V 的子空间; (2) $V = V_1 \oplus V_2$.

7. (10 分) 设 $f(x)$ 是一个整系数多项式。证明: 若存在一个偶数 a 及一个奇数 b, 使得 $f(a)$ 与 $f(b)$ 都是奇数, 则 $f(x)$ 没有整数根。

8. (10 分) 设 V_1, V_2 是 n 维欧氏空间 V 的子空间, 且 V_1 的维数小于 V_2 的维数. 证明: V_2 中必有一非零向量正交于 V_1 中的一切向量.

9. (10 分) 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是可逆的对称实矩阵. 证明: 二次型

$$f(x_1, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n \\ -x_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -x_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的矩阵是 A 的伴随矩阵 A^*.