浙江大学

二〇〇三年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 数学分析　　编号 431

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一、(15分) 叙述数列的柯西（Cauchy）收敛原理，并证明之。

二、(15分) 设$f(x)$在$[a,\infty]$上一致连续，$\varphi(x)$在$[a,\infty]$上连续，且$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0$。证明：$\varphi(x)$在$[a,\infty]$上一致连续.

三、(15分) 设$f(x)$在$[a,\infty]$上有二阶连续导数，且$f(a)>0$，$f'(a)<0$，当$x>a$时$f''(x)\le 0$。证明：在$[a,\infty]$内，方程$f(x)=0$有且只有一个实根。

四、(20分) 设$f(x)$连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$（常数），求$\varphi'(x)$，并讨论$\varphi'(x)$在$x=0$处的连续性。

五、(10分) 定义$P_n(x)$为

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, \quad n=1,2,\cdots, \\ P_0(x) &= 1. \end{aligned}$$

证明：

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_k(x)dx=\begin{cases} 0, & m\ne k; \\ \dfrac{2}{2m+1}, & m=k. \end{cases}$$

六、(10分) 给出Riemann积分$\int_a^b f(x)dx$的定义，并确定实数s的范围使下列极限收敛

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^s\frac{1}{n}.$$

七、 (20分) 证明:

1) 函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，但是对任意$x\in(-\infty,+\infty)$非绝对收敛;

2) 函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$对任意$x\in(-\infty,+\infty)$都绝对收敛，但在$(-\infty,+\infty)$上非一致收敛。

八、 计算:

1) (15分) $\max\limits_{0\le s\le 1}\int_0^1 |\ln|s-t||dt$

2) (15分) $\iint_D \frac{3x\,dx\,dy}{y^2+xy^3}$ 其中D为平面曲线$xy=1, xy=3, y^2=x, y^2=3x$ 所围成的有界闭区域。

3) (15分) $\iint_{x+y+z=1} f(x,y,z)dS$, 其中

$$f(x,y,z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, & 当\quad x^2+y^2+z^2\le 1\\ 0, & 当\quad x^2+y^2+z^2>1.\end{cases}$$