浙 江 大 学

二〇〇四年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 **数学分析** 编号 427

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一.（15 分）设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义。试证明：$f(x)$ 在 X 上一致连续的充要条件是：对区间 X 上任意的两数列 $\{x_n'\}$ 与 $\{x_n''\}$，当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))=0$。

二.（15 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内具有直到三阶的连续导数，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x}=0$。试证明：$\sum\limits_{n=2}^{\infty} nf(\frac{1}{n})$ 绝对收敛。

三.（15 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可微，且 $f(x)$ 在 a 点的右导数 $f_+'(a)<0$，在 b 点的左导数 $f_-'(b)<0$，$f(a)=f(b)=c$。证明：$f'(x)$ 在 (a,b) 内至少有两个零点。

四.（15 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，且 $\int_a^b f(x)dx<0$。试证明：存在闭区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ 使得当 $x\in[\alpha,\beta]$ 时，$f(x)<0$。

五.（15 分）证明：若一族开区间 $\{I_\alpha\}$ 覆盖了闭区间 $[0,1]$，则必存在一正数 $\delta>0$，使得 $[0,1]$ 中任何两点 x'，x'' 满足 $|x'-x''|<\delta$ 时，必属于某个开区间 $I_\beta\in\{I_\alpha\}$。

六.（15 分）用球面坐标 $x=r\sin\vartheta\cos\phi$，$y=r\sin\vartheta\sin\phi$，$z=r\cos\vartheta$ 变换方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0\ 。$$

七.（10 分）

八.（15 分）求

九.（15 分）

的值。（说明

十.（20 分）（

证明：

其中 $\frac{\partial}{\partial n}$ 为沿边

（2）$P\in R^3$ 的

证明：$\Delta\frac{1}{r}=0$

（3）设 $B(P,\delta$

$\Delta u=0$，则

七．（10分）计算$\int_0^{2\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$。

八．（15分）求$u=x^2+y^2+z^2$在条件$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$下的最大最小值，其中$a>b>c>0$。

九．（15分） 利用公式$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-xy^2}dx\ (x>0)$计算积分

$$\int_0^{\infty}\sin(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$$

的值。（说明计算过程中每一步的合理性）

十．（20分）(1) 设Ω为R^3中光滑区域，$\partial\Omega$为其边界，u,v在$\Omega+\partial\Omega$上有连续二阶导数。

证明：

$$\iiint_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)dxdydz=\iint_{\partial\Omega}(u\tfrac{\partial v}{\partial n}-v\tfrac{\partial u}{\partial n})dS,$$

其中$\frac{\partial}{\partial n}$为沿边界$\partial\Omega$外法线方向的导数，$dS$为边界上的面积元，$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$。

(2) $P\in R^3$的坐标为(ξ,η,ζ)，函数

$$r(x,y,z)=((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2)^{\frac{1}{2}}。$$

证明：$\Delta\frac{1}{r}=0$ 在$R^3\setminus\{P\}$上成立。

(3) 设$B(P,\delta)$是以P为中心δ为半径的球，$\partial B(P,\delta)$为其边界。若在$B(P,\delta)$上u满足$\Delta u=0$，则

$$u(P)=\frac{1}{4\pi\delta^2}\iint_{\partial B(P,\delta)}udS。$$