

浙 江 大 学

二〇〇四年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 高等数学

编号 344

注意:答案必须写在答题纸上,写在试卷或草稿纸上均无效。

一. 选择题:(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

1. 下列函数在点 $x=0$ 处连续的是 ()。

(A) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(B) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

(C) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(D) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

2. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导,且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{h} = \frac{1}{4}$,则 $f(x_0) = ()$ 。

(A) -4, (B) -2, (C) 4, (D) 2.

3. $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{\arccos x}}$, 则 $y'(0) = ()$ 。(A) $\frac{1}{\pi} + 2$, (B) $\frac{1}{\pi} - 2$, (C) $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}$, (D) $\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}$.4. 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 具有偏导数, 则 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$ 是函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极值的_____条件。

(A) 充分不必要,

(B) 充分必要,

(C) 既不充分也不必要,

(D) 必要不充分.

5. 下列级数中, 条件收敛的是_____。

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$,

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{6}$,

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos na}{n^2}$,

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

6. 对正态总体的数学期望 μ 进行假设检验, 如果在显著水平 0.05 下接受 $H_0: \mu = \mu_0$,

那么在显著水平 0.01 下, 下列结论中正确的是 ()。

- (A) 必接受 $H_0: \mu = \mu_0$, (B) 可能接受, 也可能拒绝 $H_0: \mu = \mu_0$,
 (C) 必拒绝 $H_0: \mu = \mu_0$, (D) 不接受, 也不拒绝 $H_0: \mu = \mu_0$.

二. 填空题: (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2} \right)^{x^2} =$ _____。

2. 若 $\int f(x) dx = \sqrt{x^2 + 1} + c$, 则 $\int f(2x) dx =$ _____。

3. 设函数 $z = f(x, y)$ 由方程 $yz^2 + x^2 + z = 1$ 所确定, 则 $dz =$ _____。

4. 交换积分次序 $\int_0^1 dx \int_x^{x^2} f(x, y) dy =$ _____。

5. 设总体 $X \sim f(x)$, $\{X_i, i = 1, 2, \dots, 50\}$ 是来自总体的一个简单随机样本,

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

则 $S^2 = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} (X_i - \bar{X})^2$ 的数学期望为 _____; (附注: $I \geq 0 \geq 0$ 中其

6. X_1, X_2, \dots, X_n 来自总体的样本, 期望为 μ (未知), 要检验 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, 则可采用的检验统计量为 _____。

三. (每小题 6 分, 满分 18 分) 计算

(1) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - 3}}{(x+1)^2 - (x-2)^2}$ 。

(2) 已知 $y = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$, 求 $y^{(n)}$ 。

(3) 计算 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx$ 。

四. (本题满分 12 分) 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & (x \leq 1) \\ e^x, & (x > 1) \end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续可导, 则常数 a 和 b 的值各等于什么? (说明理由)

五. (本题满分 12 分) 已知 $z = f(u, v)$, $u = x^3 y$, $v = \frac{x}{y}$, 其中 $f(u, v)$ 具有二阶

连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

六. (本题满分 12 分) 计算二重积分 $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, 其中 D 是由直线 $y = x$,

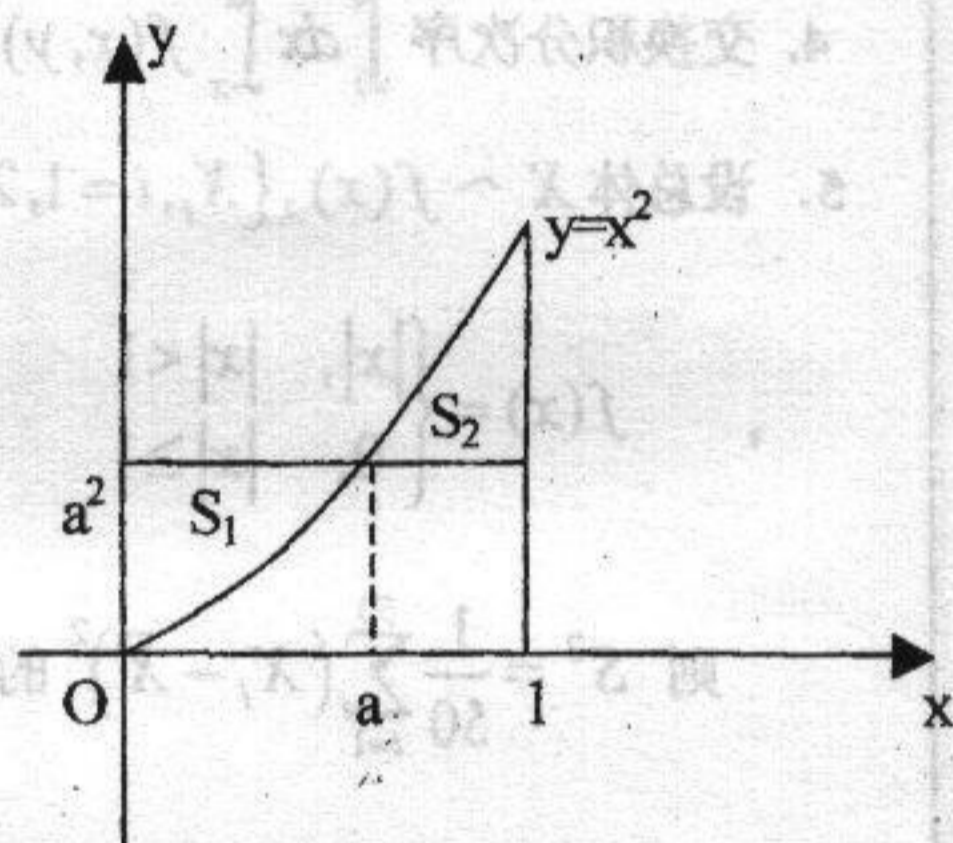
$y = 2$ 及 $xy = 1$ 所围区域.

七. (本题满分 10 分) 设: 由 $y = x^2$, $y = a^2$ 和

$x = 0$ 所围平面图形的面积为 S_1 , 由 $y = x^2$,

$y = a^2$ 和 $x = 1$ 所围平面图形的面积为 S_2 ,

其中 $0 \leq a \leq 1$. (如图)



(1) 确定 a 的值, 使面积 $S_1 + S_2$ 的值最小;

(2) 求使面积 $S_1 + S_2$ 的值最小时的平面图形 S_1 绕 y 轴旋转一周所成旋转体的体积.

八. (本题满分 10 分) 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$ 展开成 x 的幂级数,

并写出此幂级数的收敛域.

九. (本题满分 10 分) 有一盒子, 盒中装有 3 个白球, 2 个黄球. 从中任意取球两次,

每次取 1 个球不放回, 设 A 表示“第 1 次取到的是白球”, B 表示“第 2 次取到的

是白球”, 求条件概率 $P(B|A)$, $P(A|B)$.

十. (本题满分 10 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布为:

$$f(x, y) = \begin{cases} Cy^2, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

- (1) 试确定常数 C , 并求其边缘分布。
 (2) 试求 X 与 Y 的协方差 $\text{Cov}(X, Y)$ 。(其中 $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - (EX)(EY)$)

十一. (本题满分 8 分)

设 $f(x) = x^2 - \int_0^a f(x) dx$, 且 a 是不等于 -1 的常数, 求证:

$$\int_0^a f(x) dx = \frac{a^3}{3(a+1)}$$