浙 江 大 学

二〇〇四年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 高等代数　　编号 341

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

注意：本试卷满分为 150 分

1. (每小题 8 分，共 16 分) 计算 n 阶行列式：

$$(i)\quad D_n=\begin{vmatrix} b & b & b & \cdots & b & a \\ b & b & b & \cdots & a & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & a & \cdots & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ a & b & b & \cdots & b & b \end{vmatrix};$$

$$(ii)\quad D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

2. (16 分) 设 $A\in P^{n\times n}$, $f(x)\in P[x]$. 已知 $f(A)$ 可逆. 求证：存在 $g(x)\in P[x]$ 使 $(f(A))^{-1}=g(A)$. (注： P 是数域， $P^{n\times n}$ 表示元素在 P 中的 n 阶方阵的集合).

3. (16 分) 设 $A,B\in P^{n\times n}$, 求证： $(AB)^*=B^*A^*$. (注： A^* 表示 A 的伴随矩阵).

4. (题 (i) 为 15 分，题 (ii) 为 5 分，共 20 分)

实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2bx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 经正交线性替换 $(x_1,x_2,x_3)^T=P(y_1,y_2,y_3)^T$ 化为标准型 $y_1^2+4y_2^2$.

(i) 求 a,b 及正交矩阵 P;

(ii) 问二次型 f 是正定的吗？为什么？

5. (16 分) 设 $A,B\in P^{n\times n}$ 且秩 $(A)+$ 秩 $(B)\le n$. 证明：存在 n 阶可逆矩阵 M 使得 $AMB=0$.

6. (16 分) 设 A 是 n 阶复矩阵，且存在正整数 m 使得 $A^m=E$ (这里 E 是 n 阶单位阵). 证明： A 与对角矩阵相似.

7. (每小题 9 分，共 18 分) 设 $V=P^{n\times n}$ 看成 P 上的线性空间. 取定 $A,B,C,D\in P^{n\times n}$. 对任 $X\in P^{n\times n}$, 令 $\sigma(X)=AXB+CX+XD$. 求证： (i) σ 是 V 的线性变换； (ii) 当 $C=D=0$ 时， σ 可逆的充要条件是 $|AB|\neq 0$.

8. (16 分) 设 σ 是线性空间 V 的线性变换且 $\sigma^2=\sigma$. 令 $V_1=\sigma(V)$, $V_2=\sigma^{-1}(0)$. 证明： $V=V_1\oplus V_2$ 且对每个 $\alpha\in V_1$ 有 $\sigma(\alpha)=\alpha$.

9. (16 分) 设 V 是 n 维欧氏空间， V_1,V_2 是 V 的子空间，且 $\dim V_1<\dim V_2$. 证明： V_2 中存在一个非零向量，它与 V_1 中任一个向量正交.