浙江大学

二〇〇五年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 高等代数　　编号 341

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

本卷共150分.

1. （10分）设整系数多项式 $f(x)$ 的次数是 $n=2m$ 或 $n=2m+1$（其中 m 为正整数）. 证明：如果有 k（$\geq 2m+1$）个不同的整数 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 使 $f(\alpha_i)$ 取值1或－1，则 $f(x)$ 在有理数域上不可约.（提示：用反证法）

2. （10分）设 A 是 n 阶矩阵，$X^T=(x_1,\dots,x_n), Y=(y_1,\dots,y_n)^T$，$a$ 是一个数.

   (1) 求证：$\begin{vmatrix} A & Y \\ X^T & 0 \end{vmatrix} = -X^TA^*Y.$

   (2) 进一步，再证：$\begin{vmatrix} A & Y \\ X^T & a \end{vmatrix} = a|A| - X^TA^*Y.$（其中 A^* 表示 A 的伴随矩阵）

3. （10分）设 $\xi_1,\dots,\xi_s$ 是某个齐次线性方程组的一个基础解系，$\eta_1,\dots,\eta_k$ 是该齐次方程组的 k 个线性无关的解. 证明：若 $k<s$，则在 $\xi_1,\dots,\xi_s$ 中必可取出 $s-k$ 个向量使与 $\eta_1,\dots,\eta_k$ 共同构成该齐次方程组的一个基础解系.

4. （10分）设 A 是 $n\times s$ 矩阵，证明：秩$(A)=r$ 的充分必要条件是存在两个列满秩的矩阵 $B_{n\times r}$ 和 $C_{s\times r}$ 使 $A=BC^T$.

5. （20分）设 T_1, T_2 为线性空间 V 的两个线性变换，若有 V 的可逆线性变换 S 使 $T_1=S^{-1}T_2S$，则称 T_1 与 T_2 相似。证明：T_1 与 T_2 相似的充要条件是：存在可逆线性变换 S，使对 V 中任一向量 α，由 $T_1\alpha=\beta$ 可得 $T_2(S\alpha)=S\beta$.

6. （20 分）若把所有n阶实对称矩阵按合同关系分类，问共有几类（说明原因）？每一类中最简单的矩阵是什么？

7.（20 分）(1) 在R^2中内积定义为

$$<x,y>=4x_1y_1+x_2y_2,\text{(其中}x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)^T\in R^2\text{)},$$

令$S=\{x:\|x\|=1\}$，$\|\ \|$表示向量的长度，说明S是什么形状的图形，并画出草图.

(2) 令$W=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}:2a-b+3c+d=0,a,b,c,d\in R\right\}$. 证明$W$关于矩阵的加法和数乘成为$R$上的线性空间，并求出$W$的维数，给出$W$的一组基.

8. （20 分）已知 3 维线性空间V有两组基：

（Ⅰ） $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$， （Ⅱ） $\{-\varepsilon_3,-2\varepsilon_2,-3\varepsilon_1\}$.

(1) 写出（Ⅰ）到（Ⅱ）的过渡矩阵；

（2）若向量α在基（Ⅰ）下坐标为$(1,2,3)^T$，写出α在基（Ⅱ）下的坐标；

（3）定义线性变换A为：

$$A(\varepsilon_1)=\varepsilon_1,A(\varepsilon_2)=2\varepsilon_2,A(\varepsilon_3)=3\varepsilon_3-\varepsilon_1$$

分别写出A关于基（Ⅰ），（Ⅱ）的矩阵；

（4）求$A(\alpha)$.

9. （20 分）对复域上方阵A，证明：

（ⅰ）存在正整数m使$A^m=0$当且仅当A的特征值均为零；

（ⅱ）若存在正整数m使$A^m=0$，证明：$|A+E|=1$.

（其中E表示与A同阶的单位矩阵）

10. （10 分）设T是n维欧氏空间的一个映射，若它不改变向量间的距离且将零向量变为零向量，则它是一个正交变换.