浙 江 大 学

二〇〇六年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 数学分析 编号 427

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一、（20 分）1、证明：数列$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{n}-\log n$ (n=1,2,3…)是收敛的，其中 log 表示以自然底数 e 为底的对数。

2、计算：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\ldots+\frac{1}{2n})$。

二、（15 分）设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数，对任一点$x\in(a,b)$，存在趋于零的数列$\{r_k\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f(x+r_k)+f(x-r_k)-2f(x)}{r_k^2}=0$$

证明函数$f(x)$为一线性函数。

三、（15 分）设$h(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的无处可导的连续函数，试以此构造连续函数$f(x)$，在$(-\infty,+\infty)$ 上仅在两点可导，并且说明理由。

四、（15 分）设$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^2\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

1，求$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$以及$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$；

2，问$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$，$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$在原点是否连续？$f(x,y)$在原点是否可微？试说明理由。

五、(20 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 的任何闭子区间 $[\alpha,\beta]$ 上黎曼可积，且 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，

证明：对于常数 $a>1$，成立

$$\lim_{y\to 0+}\int_0^{+\infty} a^{-xy} f(x)dx=\int_0^{+\infty} f(x)dx$$

六、(15 分) 计算曲面积分 $I=\iint\limits_S \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(ax^2+by^2+cz^2)^{3/2}}$

其中 $S=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=r^2\}$，常数 $a>0,b>0,c>0$，$r>0$。

七、(15 分) 设 V 为单位球: $x^2+y^2+z^2\le 1$，又设 a,b,c 为不全为零的常数，计算:

$$I=\iiint\limits_V \cos(ax+by+cz)dxdydz。$$

八、(20 分) 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-2x-x^2}$， 证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!}{f^{(n)}(0)}$ 收敛。

九、(15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微，$f(0)=0$。若有常数 $A>0$，使得对任意

$x\in[0,+\infty)$，有 $|f'(x)|\le A|f(x)|$。证明在 $[0,+\infty)$，$f(x)=0$。