浙　江　大　学

二〇〇七年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目　高等代数　　编号　741

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一. (17 分) 设整系数的线性方程组为$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, (i=1,2,..n)$，证明该方程组对任意整数$b_1,b_2,..,b_n$都有整数解的充分必要条件是该方程组的系数行列式等于±1 .

二. (17 分) 计算 n(n>1)阶行列式

$$\begin{bmatrix} n & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{bmatrix}, \text{其中 } s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$$

三. (17 分) 假设矩阵 A,B,C 满足 ABC 有意义. 求证:

秩(AB)+秩(BC)≤ 秩(B)+ 秩(ABC)

四(17 分) 设$x_1,x_2,\ldots,x_s$是某个齐次线性方程组的基础解系，而$h_1,h_2,\ldots,h_k$是该齐次线性方程组的 k 个线性无关的解，并且 k<s. 求证$x_1,x_2,\ldots,x_s$中必可取出 s-k 个解，使得它们个$h_1,h_2,\ldots,h_k$一起构成原方程组的一个基础解系.

五. (17 分) 设 n(n>1)阶方阵A满足$A^2-5A+6E=0$, 其中E是 n 阶单位矩阵. 证明: A相似于对角矩阵; 如果A行列式等于2^m3^{n-m} $(0<m<n, m$是正整数). 求与A相似的对角矩阵.

六. (17 分) 假设$V=M_2(R)$是由实数域上所有2×2矩阵构成的实数域上向量空间.

$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ l & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, 其中 l 是参数.

(1) 证明 $j(X)=AXB$是V上的线性变换;

(2) 当 $l \neq -1$ 时,证明 j 是可逆线性变换;

(3) 当 $l = -1$ 时,求线性变换 j 的核和值域;

(4) 在值域中取一组基,并把它扩充成 V 的基,求线性变换 j 在这组基下的矩阵.

七(16 分) 求 l -矩阵 $\begin{bmatrix} 1-l & l^2 & l \\ l & l & -l \\ 1+l^2 & l^2 & -l^2 \end{bmatrix}$ 的初等因子和不变因子.

八(16 分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 8 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

(1) 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$;

(2) 用正交线性替换化二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 为标准型;

(3) 证明 $(a, b) = a^T A b$ 定义了 R^4 上的内积,其中 a, b 是 R^4 的列向量, a^T 是 a 的转置,并求在该内积下 R^4 的一组标准正交基.

(4) 求实对称矩阵 B 使得 $B^k = A$,其中 k 为正整数(只要写出 B 的表达式,不必计算其中的矩阵乘积)

九(16 分) 设 $f(x) = (x-a_1)^2 (x-a_2)^2 \cdots (x-a_n)^2 + 1$,其中 $a_1, a_2, ..., a_n$ 是互不相同的整数.证明 f(x)是有理数域上的不可约多项式.