浙　江　大　学

二〇〇七年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目　数学分析　　　编号　427

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一.（30 分）证明：

1. $e^x \sin x - x(1+x) = O(x^3), \quad (x \to 0)$.

2. $\cos x + \sin x > 1 + x - x^2, \quad x \in (0,+\infty).$

3. 设 f 是[-1,1]上的可积函数,则有

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} f(z)dxdydz = p\int_{-1}^{1} f(u)(1-u^2)du.$$

二.(30 分)

1.叙述数集的上确界及下确界的定义.

2.设 S 是一个有上界的数集,用 S_a 表示 S 的一个平移,即

$S_a = \{x + a \mid x \in S\}$.其中 a 是一个实数,试证明

$$\sup S_a = \sup S + a$$

3.确定数集

$$\{(-1)^n \frac{3n^2-1}{2n^2} \mid n = 1,2,3,.....\}$$

的上确界和下确界(必须用定义加以验证)

三.(20 分)狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x\text{为有理数} \\ 0, & x\text{为无理数} \end{cases}$$

试分别用(1)极限定义;(2)柯西收敛准则,证明当 $x \to 1$ 时 $D(x)$ 的极限不存在.

四(20 分)

1. 设函数列$\{f_n(x)\}$与$\{g_n(x)\}$在区间 I 上分别一致收敛于$f(x)$与$g(x)$，且假定$f(x)$与$g(x)$都在I上有界. 试证明:

$\{f_n(x)\bullet g_n(x)\}$在区间 I 上一致收敛于$f(x)\bullet g(x)$.

2. 如果只给出条件: $\{f_n(x)\}$与$\{g_n(x)\}$分别一致收敛于$f(x)$与$g(x)$，能否保证必有$\{f_n(x)\bullet g_n(x)\}$一致收敛于$f(x)\bullet g(x)$? 请说明理由.

五(15 分)

设$f(x)$在[a,b]上可积，并且在$x=b$处连续. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(b-a)^{n+1}}\int_a^b (x-a)^n f(x)dx = f(b).$$

六(15 分) 设$a_1>0,\quad a_{n+1}=1+\dfrac{3a_n}{4+a_n},\quad n=1,2,3,\ldots..$

证明: 数列$\{a_n\}$有极限，并求其值.

七(20 分)设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln(1+n)}x^n$$

证明:

1. $f(x)$在[-1,1]上连续.
2. $f(x)$在 x=-1 处可导.
3. $\lim\limits_{x\to 1-} f'(x)=+\infty$
4. $f(x)$在 x=1 处不可导