江苏大学 2006 年硕士研究生入学考试试题

考试科目：概率论与数理统计

考生注意：答案必须写在答题纸上，写在试题及草稿纸上无效!

一、填空题（每空4分，总计40分）

1．设事件A, B相互独立，$P(A)=0.2, P(B)=0.4$，则$P(\overline{A}B \cup A\overline{B})=$____________。

2．设X_1, X_2, X_3相互独立，其中X_1服从［0，6］上的均匀分布，$X_2 \sim N(0,3^2)$，X_3服从参数$\lambda=3$的泊松分布，记$Y=X_1+2X_2-3X_3$，则$DY=$__________。

3．设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}, x>0, y>0 \\ 0, \quad \text{其它} \end{cases}$，则关于$X$的边缘概率密度为_______________，关于Y的边缘概率密度为_______________。

4．设随机变量X的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases} 3x^2, 0<x<1 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$，$Y$表示对$X$的 5 次独立观察中事件$\left\{X \le \frac{1}{2}\right\}$出现的次数，则$DY=$__________。

5．设总体$X \sim N(0,2^2)$，而$X_1, X_2, \cdots X_{15}$是来自总体X的简单随机样本，则随机变量
$Y_1=\dfrac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)}$服从________分布，自由度为________；当$a=$____，$b=$____时，随机变量$Y_2=a(X_1+\cdots+X_{10})^2+b(X_{11}+\cdots X_{15})^2$服从$\chi^2$分布。

6．将一枚硬币掷n次，以X和Y分别表示正面向上和反面向上的次数，则X和Y的相关系数为______ 。

二、（18分）设总体$X \sim N(40,5^2)$

（1） 抽取容量为36的样本，求$P\{38 \le \bar{\xi} \le 43\}$；

（2） 抽取容量为64的样本，求$P\{|\bar{\xi}-40|<1\}$；

(3)抽取容量为 16 的样本，求$P\left\{\frac{1}{2}\times 5^2 \le \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}(\xi_i-\mu)^2 \le 2\times 5^2\right\}$.

三、（１２分）设总体X的分布函数为$F(x)=\begin{cases} x^{\sqrt{\theta}}, 0\le x\le 1 \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$，$x_1, x_2, \cdots x_n$为来自总体$X$的一组样本观察值，求参数$\theta$的矩估计值和极大似然估计值。

四、（１４分）设顾客在某银行的窗口等待服务的时间X（以分计）服从指数分布，其概率密度为$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}, x>0 \\ 0, \quad x\le 0 \end{cases}$，某顾客在银行的窗口等待服务，若超过 8 分钟他就离开，他一个月要到银行 5 次，以Y表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，写出Y的分布率，并求$P\{Y\ge 2\}$。

五、（１２分）设X和Y是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_x(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}, 0\le x\le 2 \\ 0, 其它 \end{cases}, \quad f_y(y)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, y>0 \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$$

（１） 设含有c的二次方程为$c^2+2Xc+Y=0$，试求c有实根的概率；

（２） 求$Z=X+Y$的概率密度。

六、（１２分）设$X_1, X_2, \cdots X_n$为来自总体X的一个样本，$EX=\mu, DX=\sigma^2$，

（１） 确定常数c使得$c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$为$\sigma^2$的无偏估计；

（２） 确定常数c使得$(\overline{X})^2-cS^2$是μ^2的无偏估计。

（$\overline{X}, S^2$分别是样本均值和样本方差）

七、（１５分）甲、乙、丙三人各自加工一个产品，检验的结果是在三个产品中发现一个次品。

设甲、乙、丙加工产品的次品率分别为0.1, 0.2, 0.3, 分别求这个次品是甲、乙、丙加工的概率。

八、（1 5分）某元件的寿命X（以千小时计）服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，已知$\sigma^2=2.5$，现需要对均值μ进行假设检验：

$$H_0:\mu\geq 15, H_1:\mu<15$$

（1） 现测得10只元件的寿命如下：

13.2, 14.5, 15.6, 14.2, 16.3, 15.2, 15.8, 15.8, 14.5, 16.2

试检验假设$H_0:\mu\geq 15, H_1:\mu<15$（取$\alpha=0.05$）；

（2） 若要求当H_1中的$\mu\leq 13$时犯第二类错误的概率不超过$\beta=0.05$，求所需的样本容量。

九、（1 2分）对某产品的质量指标进行抽样检验，每天抽取容量为 5 的样本，（每天的样本相互独立），某 4 天的样本方差数据为 $S_1^2=320, S_2^2=453, S_3^2=141, S_4^2=296$，试求$\sigma^2$的95%的置信区间（假定产品的质量指标$X\sim N(\mu,\sigma^2)$）。

附表：

1、 标准正态分布函数表

x	1.6	2.0	2.4	3.6
$\phi(x)$	0.9452	0.9772	0.9918	0.9998

2、 χ^2分布表

n	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.025$	$\alpha=0.975$	$\alpha=0.95$
12	26.217	22.337	4.404	5.226
15	30.578	27.488	6.262	7.261
16	32.000	28.845	6.908	8.000