机密★启用前

江苏大学2006年硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

考生注意：答案必须写在答题纸上，写在试题及草稿纸上无效

一（15分）计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

二（18分）设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

求：（1）A 的特征多项式和全部特征根

（2）A 的不变因子、行列式因子、初等因子。

（3）A 的 Jordan 标准形。

三（16分）设 A 是 n×n 阶非零矩阵。证明：存在一个 n×n 阶非零矩阵 B，使 AB=0 的充分必要条件是 $|A|=0$。

四（18分）在 $R^{2\times2}$ 中，设 $M=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$，令 $\sigma(X)=XM-MX,\forall X\in R^{2\times2}$

（1） 试证：σ 是 $R^{2\times2}$ 的一个线性变换。

（2） 求 σ 的核 $\sigma^{-1}(0)$ 的维数和一组基。

五（18分）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t;\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的秩分别为 r_1,r_2,r_3，证明：$\max(r_1,r_2)\le r_3\le r\ +r_2$

六（24分）设 V 是复数域上的 n 维线性空间，而线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$ 下的矩阵是一 Jordan 块，证明：

1. V 中包含 ε_1 的 σ 的不变子空间只有 V 自身

2. V 中任一非零的 σ 的不变子空间都包含 ε_n

3. V 不能分解成两个非平凡的 σ 的不变子空间的直和

七（14 分）设 $f_1(x) = af(x) + bg(x), g_1(x) = cf(x) + dg(x)$ 且 $ad - bc \neq 0$

试证：$(f(x), g(x)) = (f_1(x), g_2(x))$

八（16 分）试证：

1. 如果 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是正定矩阵，则 $|A| \le a_{nn}P_{n-1}$，这里 P_{n-1} 是 A 的 n-1 阶顺序主子式。

2. 如果 A 是正定矩阵，则 $|A| \le a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

提示：可利用结论 $\begin{vmatrix} A & -Y \\ X^T & O \end{vmatrix} = X^T A^* Y$，

其中 A^* 是 A 的伴随矩阵，$A = (a_{ij})_{n\times n}$，$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$。

九（10 分）设 n 阶方阵 A 的特征多项式为 $f(\lambda)$ 且 $(f(\lambda), f'(\lambda)) = d(\lambda)$，$h(\lambda) = f(\lambda)/d(\lambda)$。证明：A 相似于对角阵的充要条件是 h(A)=0。