

## 江苏大学 2006 年硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析

考生注意：答案必须写在答题纸上，写在试题及草稿纸上无效！

一 证明下列各题：

1、设  $p$  为正整数，证明：若  $p$  不是完全平方数，则  $\sqrt{p}$  是无理数。（10 分）

2、设  $D(x)$  为狄利克雷函数， $x_0 \in \mathbb{R}$ ，证明： $\lim_{x \rightarrow x_0} D(x)$  不存在。（10 分）

3、设函数  $f$  在  $(0, +\infty)$  上满足方程  $f(2x) = f(x)$ ，且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 。

证明： $f(x) \equiv A$ ， $x \in (0, +\infty)$ 。（10 分）

4、设  $f$  为  $\mathbb{R}$  上的单调函数，定义  $g(x) = f(x+0)$ ，证明： $g$  在  $\mathbb{R}$  上每一点都右连续。（10 分）

5、设  $f$  为  $[a, b]$  上的增函数，其值域为  $[f(a), f(b)]$ ，证明： $f$  在  $[a, b]$  上连续。（10 分）

6、设  $f$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的函数，且对任何  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ，都有： $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$

若  $f'(0) = 1$ ，证明对任何  $x \in \mathbb{R}$ ，都有： $f'(x) = f(x)$ 。（10 分）

7、证明： $f$  为  $I$  上凸函数的充要条件是对任何  $x_1, x_2 \in I$ ，函数  $\varphi(\lambda) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$  为  $[0, 1]$  上的凸函数。（10 分）

8、证明：若正项级数  $\sum u_n$  收敛，且数列  $\{u_n\}$  单调，则  $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = 0$ 。（10 分）

9、设函数  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ ，定义在  $[0, 1]$  上，证明它在  $(0, 1)$  上满足下述方程：

$$f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = f(1)。$$
（10 分）

10、设  $f$  为定义在  $\mathbb{R}^2$  上的连续函数， $\alpha$  是任意实数，

$$E = \{(x, y) \mid f(x, y) > \alpha, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}; \quad F = \{(x, y) \mid f(x, y) \geq \alpha, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

证明： $E$  是开集， $F$  是闭集。（10 分）

11、设  $f$  为  $[a, b]$  上的有界单调函数，证明：1) 函数至多只有可数个间断点，2) 讨论函数在  $[a, b]$  上的可积性。（10 分）

二 计算下列各题:

12、半径为  $r$  的球体沉入水中, 其比重与水相同, 试问将球体从水中捞出需作多少功? (10分)

13 设  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 计算积分  $\int_0^x S(t)dt$ 。(10分)

14、设  $F(x,y) = \int_{\frac{x}{y}}^{xy} (x-yz)f(z)dz$ , 其中  $f(z)$  为可微函数, 求  $F_{xy}(x,y)$ 。(10分)

三 证明不等式:

15、设  $f$  在  $[a,b]$  上连续, 证明不等式

$$\left[ \int_a^b f(x)dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x)dx$$

其中等号仅在  $f(x)$  为常量函数时成立。(10分)