

江苏大学 2007 年硕士研究生入学考试试题

科目代码： 450

科目名称： 概率论与数理统计

考生注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷、草稿纸上无效！（允许使用计算器）

一、填空题（每空5分，共计40分）

1. 甲乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率为0.5, 0.4, 现已知目标被命中，则它是甲射中的概率为_____。

2. 设随机变量 X 在区间 $[-2, 3]$ 上服从均匀分布，随机变量 $Y = \begin{cases} 1, & \text{若 } X > 0 \\ 0, & \text{若 } X = 0 \\ -1, & \text{若 } X < 0 \end{cases}$ ，则方差

$DY =$ _____。

3. 设 \bar{X} 和 S^2 分别是来自二项分布 $B(m, p)$ 的样本均值与样本方差，样本容量为 n ，若用 $\bar{X} - kS^2$ 作为 mp^2 的无偏估计，则 $k =$ _____。

4. 设 X 服从正态分布 $N(1, 2^2)$ ， Y 服从参数为 3 的泊松分布， Z 服从 $[2, 4]$ 上的均匀分布。令 $V = 4X + 3Y - Z$ ，则期望 $E(2V - 3) =$ _____，方差 $Var(4V - 5) =$ _____。

5. 设 X 和 Y 为两个随机变量，且 $P(X \geq 0, Y \geq 0) = \frac{3}{7}$ ， $P(X \geq 0) = P(Y \geq 0) = \frac{4}{7}$ ，则 $P\{\max(X, Y) < 0\} =$ _____。

6. 设灯泡的寿命 X （以小时计）的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{100}{x^2}, & x \geq 1000 \\ 0, & x < 1000 \end{cases}$ ，一个教室中装有 4 个这样的灯泡，则最初 1500 小时内没有一个损坏的概率为_____，最初 1500 小时内只有一个损坏的概率为_____。

二、（12分）设 X 和 Y 均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，且 X 和 Y 相互独立，试求 $Z_1 = aX + bY$ 和 $Z_2 = aX - bY$ 的相关系数（其中 a, b 是不为零的常数）。

三、(12分) 利用切比雪夫不等式, 求抛硬币多少次, 才能使样本均值 \bar{X} 落在 0.4 和 0.6 之间的概率至少为 0.9?

四、(16分) 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} Ay(1-x), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}.$$

(1) 试确定常数 A; (2) 求 (X, Y) 的联合分布函数; (3) 求关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度; (4) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

五、(15分) 设 X_1, X_2, \dots, X_9 是来自正态总体 X 的简单随机样本,

$$Y_1 = \frac{1}{6}(X_1 + X_2 + \dots + X_6), \quad Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9), \quad S^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^6 (X_i - Y_1)^2, \quad \text{求统计量}$$

$$Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S} \text{ 服从什么分布, 并写出自由度。}$$

六、(16分) 三架飞机: 一架长机两架僚机, 一同飞往某目的地进行轰炸, 但要到达目的地, 一定要有无线电导航, 而只有长机有此设备, 一旦到达目的地, 各机将独立进行轰炸, 且每架机炸毁目标的概率均为 0.3, 到达目的地之前, 必须经过高射炮上空, 此时任一飞机被击落的概率为 0.2, 求 (1) 目标被炸毁的概率; (2) 已知目标被炸毁, 三架飞机均到达目的地的概率。

七、(15分) 设某产品的寿命 X 的概率密度为

$$f(x; \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}, & 0 < \theta_1 < x < +\infty, \theta_2 > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(X_1, X_2, \dots, X_n) 是测得 n 个样品的寿命。试求: (1) θ_1, θ_2 的矩估计量; (2) θ_1, θ_2 的最大似然估计量。

八、(12分) 设 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 是一组样本观测值, 在平面上所处的位置近似形成一条直线, 现选择函数 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 使得 $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)^2$ 达到最小, 求 \hat{a}, \hat{b} 。

九、(12分) 7台自动机床在相同条件下, 独立完成相同的工作, 在一段时间内统计7台机床故障数的资料如下:

机床代号 ξ	1	2	3	4	5	6	7
故障频数	2	10	11	8	13	19	7

试问故障的发生是否与机床本身质量有关 ($\alpha = 0.05$), 即检验每台机床发生故障是否等可能的 (已知 $\chi_{0.05}^2 = 12.6$)。