机密★启用前

江苏大学2007年硕士研究生入学考试试题

科目代码： 449　　　　科目名称： 高等代数

考生注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷、草稿纸上无效！

一（18分）设 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 3 & -3 & 6\\ 2 & -2 & 4\end{bmatrix}$

求：1） A的不变因子、行列式因子、初等因子；

2） A的Jordan标准形。

二（16分）计算n+1阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{bmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^n & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{bmatrix}$$

三（20分）

（1） 设有一向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$，从中任取m个向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_m}$ （$1\le m\le s$）。若秩（$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$）=r, 则秩（$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_m}$）$\ge r+m-s$

（2） 设A是 $m\times r$ 矩阵，若A是列满秩矩阵（即A的列向量组是线性无关的），则必存在m阶可逆矩阵P，使 $A=P\begin{bmatrix}E_r\\ o\end{bmatrix}$

四（18分）设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$，$W=\left\{B\in P^{3\times 3}\,\middle|\,AB=BA\right\}$，求W的维数和一组基。

五（16 分）设/A 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换，/ $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k$ \ 分别是/A 的属于互不相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ 的特征向量（$1\le k\le n$），则/ $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k$ \ 线性无关。

六（16 分）设/A 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换 ，$f(x),g(x)\in P[x]$，d(x)是 f(x)与 g(x)的最大公因式，f (/A)=O, g (/A)=O, 试证：d (/A)=O

七（16 分）设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为一实对称阵，若 A 是半正定的，则 A 的一切主子式 $|A_k|\ge 0$
其中

$$A_k=\begin{bmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{bmatrix} \qquad \text{其中} 1\le i_1\le\cdots\le i_k\le n$$

八（15 分）若/A 是正交变换，则/A 的不变子空间的正交补也是/A 的不变子空间。

九（15 分）设 $L(V_n)$ 表示数域 P 上 n 维线性空间 V 的所有线性变换构成的集合。若 $\sigma\in L(V_n)$，且 V 中有一个由 σ 的特征向量构成的基，证明：V 的任一非零的 σ 的不变子空间 W 都存在由 σ 的特征向量构成的基。