机密★启用前

江苏大学 2007 年硕士研究生入学考试试题

科目代码：617　　　　考试科目：数学分析

考生注意：答案必须写在答题纸上，写在试题及草稿纸上无效

1. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，证明：（1）$\lim_{n\to\infty}\frac{[na_n]}{n} = a$；（2）假设 $a>0$，$a_n>0$，则 $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = 1$。（10 分）

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上满足方程 $f(x^2)=f(x)$，且 $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=f(1)$，求证：$f(x)\equiv f(1), x\in(0.+\infty)$。（10 分）

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$，求证：存在点 $x_0\in[0,a]$，成立 $f(x_0)=f(x_0+a)$。（8 分）

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对任何 $x\in[a,b]$，存在 $y\in[a,b]$，使得 $|f(y)|\le\frac{1}{2}|f(x)|$，求证：存在 $x_0\in[a.b]$，满足 $f(x_0)=0$。（10 分）

5. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，且对任意 $x,y\in R$，成立 $f(x+y)=f(x)+f(y)$。求证：（1）$f(x)$ 在 R 上连续；（2）$f(x)=f(1)x$。（12 分）

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上具有二阶导数，且 $|f''(x)|\le M$，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取得最大值，求证：$|f'(0)|+|f'(a)|\le Ma$。（8 分）

7. 求证 $f(x)$ 为 I 上凸函数的充要条件是对任意 $x_1,x_2\in I$，函数 $\varphi(\lambda)=f(x_1+(1-\lambda)x_2)$ 是 $[0,1]$ 上的凸函数。（10 分）

8. 证明：如果 $\{x_n\}$ 为单调数列，若 $\{x_n\}$ 存在聚点，则必是唯一的，且该聚点是 $\{x_n\}$ 的上确界。（12 分）

9. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上有定义，如对 (a,b) 内任意收敛数列 $\{x_n\}$，极限 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在，求证：$f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续。（8 分）

10. 已知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，若记 M,m 分别表示 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上、下确界，证明：存在实数 c $(m\le c\le M)$，满足：$\int_a^b f(x)g(x)dx = c\int_a^b g(x)dx$，（8 分）

11. 假设 $f(x)$ 是 $(0,\infty)$ 单调递减连续正函数，又 $a_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_1^n f(x)dx$，求证数列 $\{a_n\}$ 收敛。（10 分）

12. 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，求证：$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$。（8 分）

13. 已知 f 在 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，且在 P_0 给定了 n 个向量 l_i，$i=1,2,\cdots n$，相邻 两个向

量之间的夹角为$\dfrac{2\pi}{n}$. 证明：$\sum_{i=1}^{n} f_{l_i}(P_0)=0$。（10 分）

14. 求曲面$x^2+y^2+z^2=x$的切平面，使该切平面垂直于平面$x-y-\frac{1}{2}z=2$和平面$x-y-z=2$。（12 分）

15. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{1+n^2x^2} f(x)dx=\frac{\pi}{2}f(0).$$（14）