机密★启用前

江苏大学2008年硕士研究生入学考试试题

科目代码： 854 **科目名称：** 高等代数

考生注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷、草稿纸上无效！

一（18分）设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&3&2\end{bmatrix}$

求：1）A的特征多项式

2）A的不变因子、行列式因子、初等因子；

3）A的Jordan标准形

二（18分）计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b&b\\c&a&b&\cdots&b&b\\c&c&a&\cdots&b&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\c&c&c&\cdots&a&b\\c&c&c&\cdots&c&a\end{vmatrix}$$

三（24分）

1. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$ 有相同的秩，

   证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$ 等价.

2. 设 $\alpha\ =(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$，$i=1,2,\cdots,s$； $\beta=(b\ ,b_2,\cdots,b_n)$

   证明：若线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\cdots\\a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0\end{cases}$

   的解全是 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 的解，则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示.

四（16 分）设 A,B,C,D 均为数域 P 上 n 阶矩阵，且 $|A| \neq 0$，AC=CA.

则 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$

五（18 分）设 A 为 $m \times n$ 阶实矩阵，试证：$R(A^T A) = R(A)$

六（16 分）设 T 为上三角的正交矩阵. 则 T 必为对角矩阵，且对角线上的元素为+1 和-1.

七（20 分）设 W 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个 m 维子空间，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 W 的一组基.则这组向量必定可扩充为整个空间的一组基。即在 V 中必定可找到 $n-m$ 个向量 $\alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n$，使得 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m, \alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一组基。

八（20 分）设 A 为数域 C 上 n 阶矩阵，$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$，$\lambda_0$ 为 A 的任一特征值，而 $\{\alpha, A\alpha, \cdots, A^{n-1}\alpha\}$ 为线性无关的 n 维向量组. 试证：A 的属于特征值 λ_0 的线性无关的特征向量只有一个。