机密★启用前

江苏大学 2008 年硕士研究生入学考试试题

科目代码： 604　　　　**科目名称：** 数学分析

考生注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷、草稿纸上无效！

1. 设 $f(x)$ 在区间 I 上有界，记 $M=\sup\limits_{x\in I} f(x)$，$m=\inf\limits_{x\in I} f0x$。

证明：$\sup\limits_{x',x''\in I} |f(x')-f(x'')|=M-m$。(10 分)

2. 计算下例极限：1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{p=1}^{n} p!}{n!}$；2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+n)^{\alpha}-n^{\alpha}\right],0<\alpha<1$。(10 分)

3. 设 $f(x)$ 为 $U_-^0(x_0)$ 的单调递增函数，求证：若存在数列 $\{x_n\}\subset U_-^0(x_0)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$，则有 $f(x_0-0)=\sup\limits_{x\in U_-^0(x_0)} f(x)=A$。(10 分)

4. 求证：若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且对任意 $x\in[a,b]$，$f(x)\neq 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒正或恒负。(10 分)

5. 求 心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的切线与切点向径之间的夹角。(10 分)

6. 证明下列各不等式；$\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x \quad ,x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$。(10 分)

7. 证明：若 $f(x)$，$g(x)$ 为区间 I 上的凸函数，则 $F(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ 也是区间 I 上的凸函数。(10 分)

8. 证明：（1）设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导，若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 都存在，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$；

（2）设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上 n 阶可导，若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x)$ 都存在，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x)=0$。

(15 分)

9. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，且有斜渐近线，即有数 b 和 c，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-bx-c]=0$，求证：$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。(10 分)

10. 证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且除有限个点外，有 $F'(x)=f(x)$，则有 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$。(10分)

11. 设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且$f''(x)>0$，试证明：（1）$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$；（2）

又若$f(x)\le 0, x\in[a,b]$，则又有$f(x)\ge\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx$， $x\in[a,b]$．(10 分)

12 证明下列命题：（1）设$f(x)$为$[a,+\infty)$上非负 连续函数，若$\int_a^{+\infty}xf(x)dx$收敛，则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$也收敛；（2）设$f(x)$为$[a,+\infty)$上的连续函数，且当$x\to+\infty$时，$f(x)$递减地趋于 0，则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛的充要条件为$\int_a^{+\infty}xf(x)dz$收敛。(10 分)

13. 证明：（1） $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$满足方程$y^{(4)}=y$；

（2） $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n!)^2}$满足方程$xy''+y'-y=0$.(10 分)

14.讨论函数序列$\{f_n(x)\}$，其中$f_n(x)=nxe^{-nx}$，在下述区间上的一致收敛性：（1）$[0,1]$； （2）$[1,+\infty)$。(15 分)